

آکادمی تیزهوشان

آفرید

WWW.OFFROADIHA.COM

09900800293

۴۴
راستی

هف

۱۲۳۴
مردانه

اصول هندکشی

نقشه انقرب الخاقان

اقا میرزا عبدالغفار

نجم الملک سرتیپ هشتاد و یکم

و مولف علو مراد

وریدر



مبارک نظامیہ

طهران

۱۲۹۲

داخله منسب

۶۳۶

فن منسب

ب ۳

کتاب منسب

۹ ح ۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على محمد وآله اجمعين
وبعد پوشیده نیست که از آنجا که تاج و تخت خسروی بفرق فرقه سنای
و قدم عالم آرای ملک الملوک و سلطان استلاصین خدیو خدیوان کامکار
اعلی حضرت اقدس شهریار همیشه زمان سایه نروان سلطان بن سلطان
و انخافان بن انخافان ناصر الدین شاه قاجار خلد الله مکه و دوله
مبارک و عزیزین گردیده دولت را نظامی تازه و مملکت را استقامی بی اندازه حاصل
بقتضای هر چه نیاز تفاوت و توفیر معلوم است خاصه علوم را که در عهد رسوم
دارند و در شمار آثار طامیه بود و پیشتر وجهت این حسد و اعلی نیت از اول دولت
روز افزون احیا و تجدید این مراسم و افتاء تشیید این عایم بوده و است
چنانچه تقوین منصب جلیل پس از وزارت علمیه شخص اکمل و فردا و حد و استقامت
اشرف امجد و الا اعضاء استاسطه علی قلی میرزا اوام الله مجده و بنای سرب
مبارک و در این سنون که ثمرت معلین محمد و متعلین مستعد و بذل مبالغه خیره
در این راه هر یک از شبته شاهی عدل کوی این است منت چه ضعیف

مقاله اول

نو خود بسیار و چون بقصای را ده علیه بیاونی و مساعی جمیده وزیر علوم و هنر است
 و ایزد مقترب الحاقان حضرت علی بن ابراهیم و موطبت تائمه مقترب الحاقان محمد حسین خان
 بنیر و ناظم امور و قاضی سبغ فزون خاصه ریاضی زاندا الوصف و ایراست و در
 سایر فنون و صنایع بر مقدمات است خاصه بر علم حساب و هندسه
 لهذا حقیر جانی ابن الفاضل الکمال علی محمد عجب الغفار اصفهانی محض ادای
 شکر نعمت و استرضای خاطر ملکوتی مظاہر بنسره و انه و تقدیم خدمت در حضرت
 وزارت علیه و اشفاع عموم متعلیم مدرست مبارکه دار الفنون و غیر جم کتبی
 و اصول فنون ریاضی با تدارک فکری قراتایلف و ترجمه نمود و در اصول حساب کتاب^{۱۲}
 ذکر نموده سبب تالیف آن کتب را از جمله آن علوم هندسه اولی است و معروف
 کتابی که در این علم میان ما بوده هندسه اقلیدس است که در زمان مامون بن از
 از اکت یونانی بفرنی ترجمه شد و بعد سلطان المحقق خواجه نصیر علیه الرحمة
 از آن تحریر فرموده اسلوب آن کتاب بعد از وضع قانون جدید و تحصیل پسندیده
 نیست چونکه در اصل کتاب اقلیدس اصول و فروع مخلوط اند و بعد از آن خواجه
 علیه الرحمة در تحریر آن برای هر شکل جدا خری ذکر فرموده اند و بلکه در اکثر اشکال
 و جوه عیدیه و جهتلاف وقوع بسیار بیان نموده اند مانند شکل عربی که ۴۹
 وجه در آن ذکر شده و چنین کتابی تحصیل مبتدی مناسب نیست و مقصود حقیر نه
 تو هین آن کتاب است ابدان بلکه اشاره بعدم مناسبت او است برای مبتدیان
 ولی مطالع آن برای تتبع و تشریف و بر این وسعت خیال بسیار خوب است
 باجمعه دو کتاب هم در مدرسه مبارکه ترجمه شده یکی از آنها اگرچه خوش اسلوب است
 ولی ناقص میباشد و حروف اشکالش فزونی و کتاب دیگر معاش بسیار حقیر برای
 مدرسه مبارکه دار الفنون دو کتاب در اصول هندسه نوشته یکی تالیفی است بسوط

اصول و خواص از هم ممتاز و ضمیمه وار و مشتق بر مسائل مفیده و رسمیه بسیار
که در مورد زندگانی بکار آیند و دیگر همین کتاب موجود است که اسامی و ابعاد و پنداره
چون اندازه و طول و سطح و مساحت و اینها را بطریق اختصار و بجا رتی با نموس و در آن
شده و نظریات این کتب برای مبتدی مناسب تر است و این سه کتاب است که تاکنون
چندین مرتبه تصحیف در آن شده تا باینجا رسیده و باطن برای تحصیل با انتظام نزد عموم
هندسین مختار افتاده و مشتق است بر هشت مقاله

اول در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرد

دوم در خواص دایره و مقیاس زوایا

سوم در خواص اشکال کثیره الاضلاع و مساحت و تشابه آنها

چهارم در خواص اشکال کثیره الاضلاع منظمه و مساحت دایره

پنجم در خواص اشکال فضایی یعنی خطوط و سطوح و در سطح مستوی بچند

ششم در خواص اجسام کثیره الطوح

هفتم در خواص کره و متعلقاتش

هشتم در مساحت اجسام مستدیره که یعنی کره و استوانه و مخروط

و اصول احکام یکدیگر در این کتاب مبرهن شده ۲۱۳ است و عدد نتایج

و شرح و پیمانی که در حقیقت احکام فرعی اند قریب به ۱۵۰ و عدد احکام مبرهن

منوونی که بی دلیل ذکر شده ۴۰ و عدد مسائل حل کردنی که جوابهاشان

پایان شده ۶۵ و مجموعا ۴۰۵ عدد باشد پس بر مستحکم که بخواهند هندسین

شوند اقلال لازم است که مجموع این احکام اسمیه و فرعیه را بنحواط سپارند اگر نخواهند

علاوه بر آنها برای همین را حفظ کنند

مقاله اول

و ترتیب این علم در علوم تحسینیه بعد از اصول حساب است یا بعد از اصول جبر و مقابله

مقاله اولی

در خواص خطوط و ذوایا و اشکال مفردة

حدود

- ۱ مکان مشرفی محدود جسم را در فضاء نامحدود این عالم حجم گوئیم
- ۲ حدی که مفروض میکند جسم را از فضاء محیطش سطح گوئیم
- ۳ محل تلاقی دو سطح جسم را خط گوئیم
- ۴ محل تلاقی دو خط را نقطه گوئیم
- ۵ بنا بر این تعریفات جسم و سطح و خط بی تصور جسم و وجود خارجی پیدا نمکند ولی در هندسه آنها را قائم بالذات فرض میکنیم و غیر متعلق با جاسمیکند و نسبت به ذرات
- ۶ حجم و سطح و خط را عموماً شکل گوئیم
- ۷ فایده علم هندسه که مساحت و سمت اشکال است و معرفت خواص آنها
- ۸ خط مستقیم خطی است غیر محدود که چون دو نقطه بر آن فرض کنیم قطعه و فاصله بین آن دو نقطه از آن خط اقصی فاصله باشد ما بین آن دو عبارت از خطی است که وضعش ما بین آن دو نقطه ثابت و تغییر ناپذیر باشد و ما هر جا خط مطلق گوئیم مقصود مستقیم و از واضحیات است که اگر دو خط در جسمی از طول خود بر هم منطبق باشند در مابقی طول البته منطبق میشوند

- ۹ خط منکسر و شبهه کثیر الاضلاع خطی است مرکب از اجزای مستقیمه
- ۱۰ خط منحنی آنست که نه مستقیم باشد نه مرکب از اجزای مستقیمه
- ۱۱ سطح مستوی آنست که چون دو نقطه غیر مشخص بر او فرض شود

تفسیر
تمام اشکال این کتاب
همه شبده و مطلق
ترا دو مرتبه وقت تمام
رو و نمود و مرور کنیم
همه که از هندسه است
مستقیم خود و عجاایه
فان نمکند و ملاحظه
خاکها و امیسه است
لحمه و سبانی در
واقع شده باشد

پایین آن دو بختی مستقیم وصل شود تمام این خط بر سطح واقع شود و ما هر جا سطح منطبق گوئیم مقصود مستوی است

۱۲ سطح منحنی آنست که راستوی باشد نه مرکب از اجزای مستوی

۱۳ وضع کیفیتی که از تقاطع دو خط مستقیم

ا ب و ا ح حادث شود زاویه گوئیم

و نقطه ا رأس زاویه است و دو خط

ا ب و ا ح ضلعینش



زاویه را گاه بحرف رأس ا بنماییم و گاه به حرف ا ح یا ح ا ب بنا بر آنکه حرف رأس در وسط افتد

دو زاویه ا و ب را متساوی گوئیم هرگاه بتوان آنها را درست بر هم منطبق شد فرض میکنیم زاویه ب بر ا نقل شود بروجی که ب بر ا براب واقع شود آنوقت اگر د بر ا ح منطبق گشت و د زاویه را متساوی گوئیم



زاویه ا را گوئیم ضایع و ثلثه امثال و ...

زاویه ب است هرگاه دو مثل این زاویه

یا سه مثلش و غیره در آن بچند

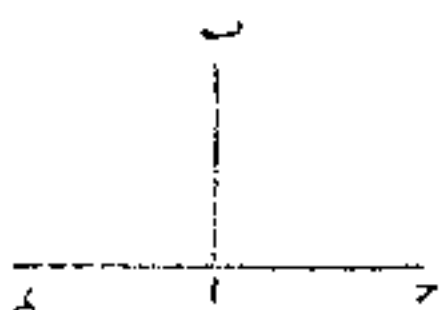
و از این قرار زوایای سه سائر مقدار بر مقیاس

پذیرند و میتوان آنها را به هم یکسر پیوست

۱۴ هرگاه خط ا ب نقطه ح را

برو جی ثنائی کنند که دو زاویه مجاوره ب ا ح

و ب ا د متساوی شوند خط ا ب را



مقاله اول

نسبت به دو عمود گوئیم و آن دوزاویه را قائمه
و عن قریب مبرهن میشود که از نقطه مفروضه ۱ از خط دو میتوان عمودی
تنظیم کرد و این که جمیع دوزایای قائمه متساوی هستند
هر زاویه که از قائمه بزرگتر باشد منفرجه و اگر کوچکتر باشد حاده
دوزاویه را متمم و تمام هر یک گوئیم هرگاه مجموعشان یک قائمه باشد
و مکمل و کمال هر یک گوئیم هرگاه مجموعشان دو قائمه باشد

۱۵ دو خط واقع در سطحی را متوازی گوئیم
هرگاه از هیچ جهت متلاقی نشوند هر چند پهنایت آنها
داوه شوند درجه شین مثل دو خط ab و cd
علا شکل سطحی است که از جانب بخاطر منتهی
پس اگر خطوط مستقیم باشند و سمت محدوده را شکل مستقیم از اضلاع و کثیرالاضلاع
و مجموع خطوط را محیط آن شکل

۱۶ ساده تر جمیع اشکال کثیرالاضلاع آنست که صاحب سه ضلع باشد و آن را
مثلث گوئیم

و اگر دارای چهار ضلع باشد ذوات بعد اضلاع پنج ضلعی و ده ضلعی و
۱۷ مثلث را متساوی الاضلاع گوئیم هرگاه هر سه ضلعش تساوی
باشد و متساوی الساقین هرگاه دو ضلعش تساوی باشند و مختلفه

الاضلاع

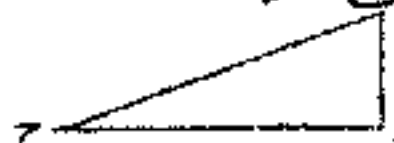
اگر هیچ کدام

برابر نباشند



۱۹ مثلث قائم الزاویه است که یک زاویه اش قائمه باشد و ضلع

مقابل با زاویه را وتر مطلق گوئیم مثلث abc و زاویه او وتر c

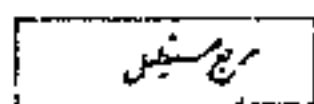
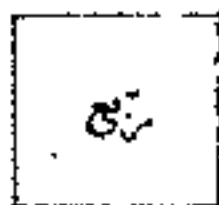


۲۰ در جمله اشکال ذوات بعد اضلاع مربع است آن

شکلی است که جمیع اضلاعش مساوی باشند و جمیع زوایا اش قائمه

و دیگر مربع مستطیل یا مستطی و آن زوایا اش قائمه

و اضلاع متقابل مساوی



و دیگر متوازی الاضلاع یا شبهه معین

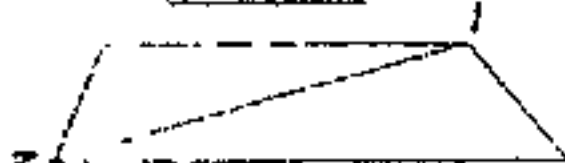
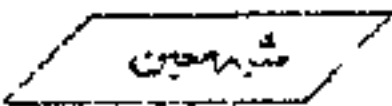
و آن اضلاع متقابل مساوی متوازی باشند

و دیگر معین و آن اضلاعش مساوی باشد ولی

زوایا اش قائمه نباشند

و دیگری ذوات منفرجه است

و آن دو ضلعش متوازی است



۲۱ در هر شکل قطر خطی است وصل باین دو زاویه غیر مجاوره مثل abc

۲۲ دو ذوات الاضلاع متساویه الاضلاع است که اضلاعش مساوی باشند

و متساوی الزاویا است که زوایا اش مساوی باشند

۲۳ دو ذوات الاضلاع را متساوی الاضلاع گوئیم نسبت به یک

هرگاه اضلاعشان نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی مرتب باشند بیک ترتیب

بر وجهی که ضلع اول یکی مساوی باشد بضلع اول دیگر و ضلع دوم به دوم و هکذا

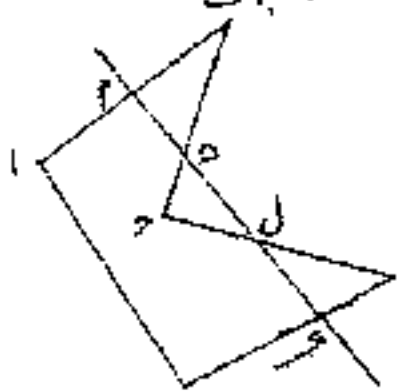
و از این دو معنی دو ذوات الاضلاع متساوی الزاویا نیز معلوم است

و در این صورت هر دو ضلع مساوی و دو زاویه مساوی را متقابلین و متناظرین گوئیم

مقاله اول

۲۴۰ کثیر الاضلاع محدب است که هر ضلعش را امتداد دهیم تا هم شکل در یک خط قرار گیرد و محیط چنین کثیر الاضلاع را خط بسته یتم پیش از دو نقطه قطع کند و اگر در پیش شکل اب حده خط هم هر محیطش را بر چهار نقطه م و ن و ل و ه قطع کند پس اینست که مثلاً ضلع ب ح که در پایین بر نقطه ن قطع شده در یک طرف شکل نیاده یعنی آن شکل محدب نیست

تنبیه چهارم مقاله اول این کتاب در اشکال مسطحه است یعنی اشکالی که خطوطشان از یک سطح مستوی خارج نباشد



در شرح اصطلاحات و علامات

علم و متعارف حکمی است که فی نفسه واضح باشد و احتیاج با قاعده دلیل نداشته باشد

قضیه حکمی است محقق که واضح نشود جز بعد از قاعده دلیل و برهان

مسئله مطلبی است وارد که اقتضا کند راه جوابی را

اصول موضوع حکمی است محقق برای برهان قضیه یا در حل مسئله از استعمال کنیم

ایراد لفظی است مشترک که تعلق کرد به هم قضیه و به هم مسئله و هم با اصول موضوعه

نتیجه حکمی است مستنبط از یک ایراد یا بیشتر

شرح تنبیهی و خصوصیات ایراد سابق الذکر یا بیشتر که از آن روی معلوم شود رابطه و فایده و حصر و عمومیت آنها

فرض قرار داد است در بیان ایراد یا و را قاعده برهان

اینصورت = علامت مساوات است مثلاً $a = b$ یعنی a مساوی b است

اینصورت (علامت کوچکتریت مثلا اگر پنجایم بنماییم که $\div$ کوچکتر است

از $\div$ چنین بنویسیم $\div$)

اینصورت (علامت بزرگتریت مثلا $\div$ یعنی $\div$ بزرگتر است از $\div$

علامت جمع نیست + و آنرا بعلاوه $\div$ تلفظ کنیم

علامت تفریق نیست - و آنرا منهای $\div$ تلفظ کنیم مثلا $\div + \div$ علامت

حاصل جمع دو مقدار $\div$ و $\div$ است و $\div - \div$ علامت تفاضل آنها یا باقی تفریق

$\div$ از $\div$ و همچنین $\div - \div + \div + \div - \div$ یا $\div - \div$ یا $\div$ معنی است که باید $\div$ و $\div$

با هم جمع کرد و $\div$ را از میزان موضوع نمود

اینصورت $\times$ علامت ضرب است مثلا $\div \times \div$ علامت حاصل ضرب $\div$ است

در $\div$ و گاه عوض علامت نقطه قرار دهند باینصورت $\div$ و گاه هیچ علامت

قرار ندهند مثل $\div$ که باز معنی حاصل ضرب آن دو مقدار است ولی اینصورت

پسند در جبر و مقابله استعمال کنیم و در جایکه بدانیم مقصود فاصله بین دو نقطه

$\div$ و $\div$ باشد

اینصورت $\div \times (\div + \div - \div)$ علامت حاصل ضرب $\div$ است در جمله

$\div + \div - \div$ و اگر بنویسیم $\div \times (\div + \div)$ و در چنین صورت

آنچه میان علامت جامع نوشته شده حکم مقدار مفرد دارد

هرگاه $\div$ در جمله خط یا مقداری نوشته شود حکم مضروب فيه آن خط و مقدار

مثلا اگر پنجایم بنماییم که خط $\div$ باید مثلا $\div$ باشد و چنین بنویسیم $\div \times \div$

و نصف زاویه $\div$ را چنین بنویسیم $\div$

مربع خط $\div$ چنین نوشته شود $\div^2$ و مکعبش چنین $\div^3$ و این دو اصطلاح را

$\div$ را ضرب کنیم
در $\div + \div - \div$
حاصل ضرب را چنین
بنویسیم

در مقام خود شرح خواهیم داد

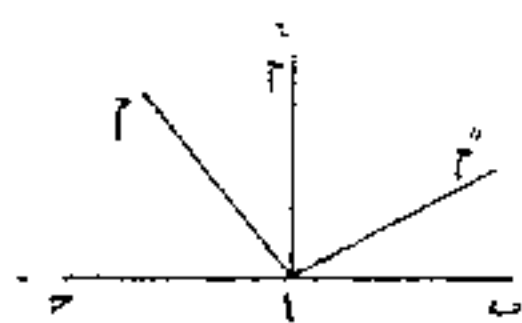
این صورت مـ علامت استخراج ضلع است مثلاً مـ بمعنی جذر مـ است
و مـ بمعنی جذر حاصل ضرب مـ است یا واسطه هندسی مـ و مـ
باینکه گاه در ضمن ادای طلب میجویم بنماییم بعضی روابط را که باین اشکال
باشد از قبیل تشابه در این صورت هرگاه شکلی را بحروف $\text{ا و ب و ج و د و ه و و}$
بنماییم شکل دیگر را نیز بهین حروف بنماییم ولی با علامتی باین صورت $\text{ا و ب و ج و د و ه و و}$
و تلفظ کنیم $\text{الف یک و ب یک و غیره یا باین صورت ا و ب و ج و د و ه و و}$
و تلفظ کنیم $\text{الف دو و ب دو و جیم دو و غیره و کذا}$
بسیار اتفاق می افتد که مجلی یا شکل یا بعضیه سابق تذکری حواله دهیم آنوقت
باین صورت مثلاً بنماییم س ل ا و و ۱۲ یعنی رجوع کنیم به شکل س ل ا
از مقاله حاضر به قضیه ۱۲ از مقاله نسیم

علوم متعارف

- ۱ دو مقدار مساوی با مقدار نسیم مساوی باشند
- ۲ کل بزرگتر است از جنس و خود
- ۳ کل مساویست با مجموع اجزای خود
- ۴ مابین دو نقطه را شواصیل نمود جز بیک خط مستقیم
- ۵ دو مقدار را خط باشند یا سطح یا حجم مساوی گوئیم در آن صورت که هرگاه یکی از آنها را بر دیگر قرار دهیم در تمام وسعت خود برهم دیگر منطبق شوند

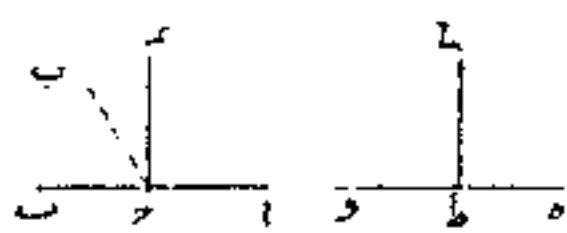
قضیه اول

از نقطه مفروضه بر خطی میتوان یک عمود بر آن خط اخراج نمود بیش
 بر همان فرض میکنیم am اول منطبق باشد بر ac و بعد حول نقطه a
 دوران کنند و حادث نمایند و زاویه مجاوره



mac و ma را که اولیش ma است
 ابتدا بسیار کوچک است و متدرجاً بزرگتر
 و در وقتیش ma ابتدا بزرگتر از ac است
 و متدرجاً ثلاً میگذرد تا بصفر رسد یا بحد

زاویه mac که ابتدا کوچک بود از ma زود بزرگتر میشود و از این قرار در آن
 مابین موضعی برای خط متحرک پیدا میشود مثل am که آنجا دو زاویه مساوی باشند
 و ظاهر است که پیش از یک موضع پیدا نشود



نتیجه که جمیع زوایای قائمه مساوی باشند
 مثلاً خط ac و عمود است بر ab و c
 بر d و کوئیم زاویه ac مساوی است با

c ط r

بر همان خط ac را نقل میکنیم بر ab چنانچه $ط$ بر c واقع شود
 آن وقت $ط$ واقع میشود بر ac و آن لازم آید که از نقطه مفروضه بر خطی بتوان
 دو عمود بر آن خط اخراج نمود

قضیه دوم

چون خط ac تلاقی کند با مجموع دو زاویه مجاوره ac

مقاله اول

۱۲

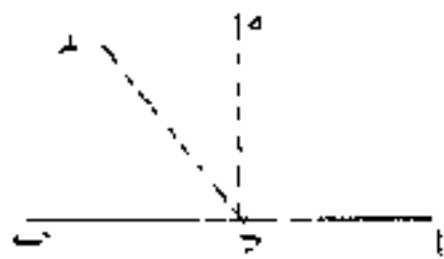
و ب د مساویست با د و قائمه

ب و ه هان از نقطه د عمود ح ه را بر خط اب

اخراج کنیم. بوقت زاویه ا ح د مساوی میشود

با مجموع دو زاویه ا ح د و ه ح د پس ا ح د

ب د مساوی میشود با مجموع سه زاویه



ا ح د و ه ح د و ب د و زاویه اول قائم است و مجموع دو زاویه دیگر نیز قائم

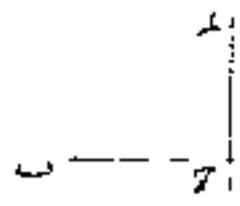
ب د است پس مجموع دو زاویه ا ح د و ب د بقدر دو قائم است

نتیجه ۱ اگر یکی از دو زاویه ا ح د و ب د قائم باشد دیگر نیز قائم است

نتیجه ۲ اگر د ه عمود باشد بر اب پس بعکس اب نیز عمود باشد بر د ه

ب و ه هان چون د ه عمود است بر اب زاویه ا ح د

مساوی میشود با مجاوره خود د ح ب و هر دو قائم اند



و چون ا ح د قائم شد مجاوره اش ا ح د نیز قائم

باشد پس زاویه ا ح د و ب د احد برابر

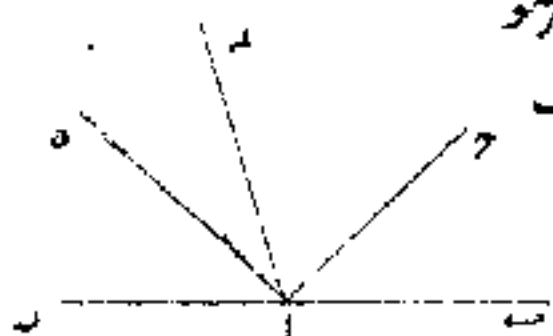
عمود است بر د ه

نتیجه ۳ - زوایای متقابل صاف و ح د و د ه ا و ه ا د که در یک

سمت خط ف د حادث گشته اند مجموعشان

مساویست با دو قائم زیرا که این مجموع بقدر دو

دو زاویه مجاوره ب ا ح و ح ا د است



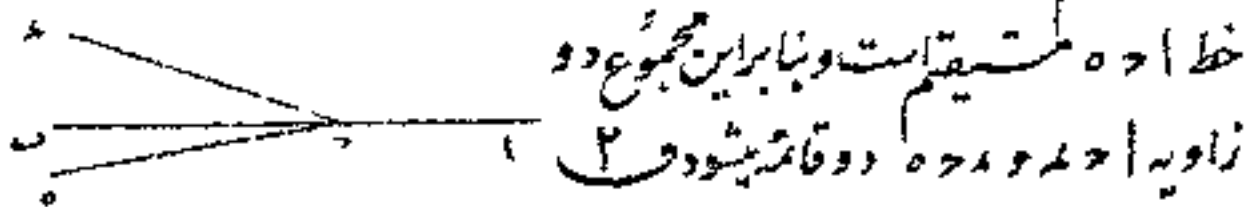
قضیه ششم

هرگاه مجموع دو زاویه مجاوره $a + b$ دو قائمه باشد پس
در ضلع خارجی a و b بر استقامت خطی واقع میشوند

برهان اگر a و b بر استقامت اند نباشد

فرض میکنیم c بر آن استقامت باشد و آنوقت

خط $a + c$ مستقیم است و بنا بر این مجموع دو



زاویه $a + c$ دو قائم میشود

ولی بفرض مجموع دو زاویه $a + b$ دو قائم بود پس

$a + b = a + c$ و از طرفین a را حذف

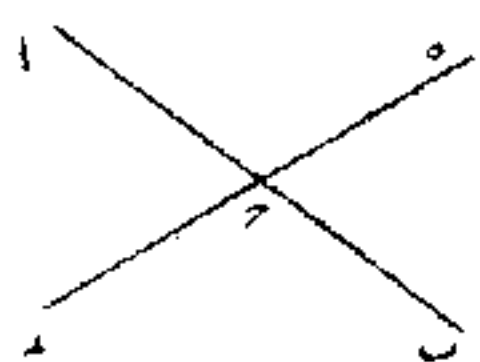
میکنیم باقی میماند $b = c$ یعنی جزو مساوی اکل و این محال است پس a و b واقع است بر استقامت a

قضیه هفتم

چون دو خط a و b متقاطع شوند دو زاویه متقابل که بر این مساوی باشند

برهان چون a و b مستقیم است مجموع

دو زاویه $a + c$ و $a + d$ دو قائم باشد چون



a و b مستقیم است مجموع دو زاویه $a + c$

$b + c$ نیز دو قائم است پس $a + c = b + c$

$a = b$ و چون $a + c$ را

از طرفین c کم کنیم باقی میماند $a = b$ مساوی با مقایله خود $b = c$

و همین وجه ثابت میکنیم که زاویه a و b مساویست با مقایله خود $b = c$

شرح مجموع چهار زاویه حادثه در حول نقطه تقاطع دو خط مساویست با چهار قائمه



زیرا که مجموع $a + b + c + d$ دو قائمه است

و بکذا مجموع $a + b + c + d$ و کلیتاً اگر چند

خط مثل $a + b + c + d$ و غیره بر نقطه متقاطع

شوند مجموع زوایای متوالیه $a + b + c + d + e + f + g + h$

و در مساوی میشود با چهار قائمه زیرا که اگر بر نقطه دو خط رسم کنیم عمود بر یکدیگر

حادث میشود چهار قائمه و مجموع آنها مساویست با مجموع زوایای مذکور $a + b + c + d + e + f + g + h$

قضیه پنجم

هرگاه بر نقطه از خط $a + b$ دو خط $c + d$ و $e + f$ در طرفینش چنان

رسم کنیم که دو زاویه $a + b$ و $c + d$ متساوی شوند گوئیم $a + b$ بر $c + d$

واقع میشود

برهان فرض میکنیم $a + b$ بر $c + d$ استقامت

باشد آنوقت بنا بر $a + b = c + d$

و بنا بر فرض $b + c = d + e$ پس $a = e$

مساوی میشود با $b + c$ و این محال است

قضیه ششم

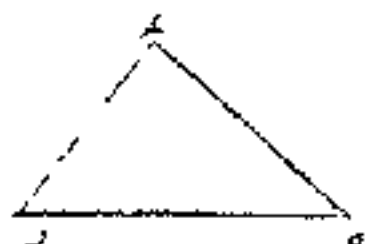
هرگاه دو ضلع و زاویه بینهما مساوی باشد با دو ضلع و زاویه

بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیران دو مثلث متساوی باشند

مثلاً زاویه $a = زاویه b$ و ضلع $a = ضلع b$ و $c = d$ و $e = f$

ا ب ج د ه و

برهان بطلان تطابق



ضلع Δ را قرار میسیم

بر Δ بطوریکه نقطه Δ

بر Δ واقع شود و نقطه Δ بر Δ آنوقت زاویه Δ چون مساویت با زاویه Δ ضلع Δ و واقع میشود بر استقامت Δ و بمنزله Δ مساویت با Δ پس نقطه Δ واقع میشود بر Δ و ضلع Δ و منطبق میشود بر Δ و بنا بر این منتهی Δ بر Δ

نتیجه از اینکه دو مثلث سه جز مساوی باشند زاویه $\Delta = \Delta$ و ضلع $\Delta = \Delta$ و ضلع $\Delta = \Delta$ استباط میشود که سه جز دیگر نیز مساوی میشوند
زاویه $\Delta = \Delta$ و زاویه $\Delta = \Delta$ و ضلع $\Delta = \Delta$

قضیه هفتم

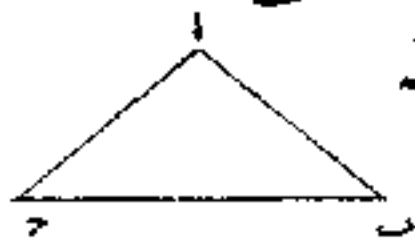
هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو زاویه و ضلع بینهما از مثلث دیگر قضیه بنظر آید و مثلث مساوی هستند
مثلاً در شکل سابق ضلع $\Delta = \Delta$ و زاویه $\Delta = \Delta$ و زاویه $\Delta = \Delta$ و کوئیم مثلث Δ مساویت با مثلث Δ

برهان بطلان تطابق ضلع Δ واقع میشود بر مساوی خود Δ و نقطه Δ بر Δ و نقطه Δ بر Δ چون مساویت با Δ ضلع Δ واقع میشود بر استقامت Δ و بنا بر این نقطه Δ واقع میشود بر نقطه Δ از خط Δ و همچنین زاویه Δ چون مساویت با Δ خط Δ واقع میشود بر استقامت Δ و نقطه Δ بر نقطه Δ از ضلع Δ پس نقطه Δ مساویت

یک مرتبه واقع شود بر دو خط a و b پس واقع خواهد شد بر فصل مشترک آنها نقطه
 a و آنوقت دو مثلث درست منطبق میشوند و متساوی میگردند
 نتیجتاً اگر a یکبار در دو مثلث سه جزو متساوی باشد ضلع $b = c$ و زاویه
 $b = c$ و زاویه $c = d$ چنین سبباً ط میشود که سه جزو دیگر نیز متساوی
 میشوند ضلع $a = d$ و $a = c$ و $a = b$ و $a = d$

قضیه هشتم

در هر مثلث هر ضلع اقصی است از مجموع دو ضلع دیگر
 برهان خط a و b چون سقیم است اقصی فاصله



باشد ما بین دو نقطه a و b پس $a < b + c$

اقصی است از مجموع $a + b + c$

با دقت دانست که هر ضلع اعظم است از تفاضل دو ضلع دیگر مثلاً ضلع a بزرگتر
 از b میگیریم و دو ضلع دیگر را b و c آنوقت بگویم $a < b + c$
 و چون c را از طرفین اسقاط کنیم چنین میشود $a - c < b$ یعنی b اعظم است
 از تفاضل a و c و چون b را اسقاط کنیم $a - b < c$

قضیه نهم

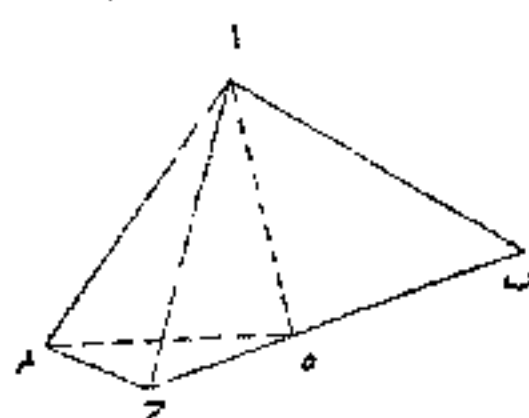
چون از نقطه a مفروضه در داخل مثلث a و b دو خط e و d
 را بطرفین ضلع a وصل کنیم مجموع این دو خط اقصی است از مجموع دو خط
 a و b

برهان خط e را امتداد میدسیم تا a را بر نقطه d قطع کند آنوقت بنا
 بر خط e اقصی است از مجموع $e + d + b$ و چون $b < e + d$ را بر طرفین

مقاله اول

قضیه نهم

هرگاه دو ضلع مثلثی مساوی باشد با دو ضلع مثلث دیگر نظیر
و زاویه حاده مابین دو ضلع اول اعظم باشد از زاویه حاده مابین
دو ضلع دوم کوئیم که ضلع سیم مثلث اول طول است از ضلع سیم مثلث دوم



مساوی باشد و مثلث را چنان ترتیب میدسیم که
ضلع ا ح در هر دو مشترک باشد و دو
ضلع مساوی دیگر ا ب و ا د در طرفین
آن باشند و فرض اغیت که زاویه با ح

ح ا د

زاویه با د را بخط ا ه نصف میکنیم این خط واقع شود در زاویه اعظم با ح
و خط ا ه را وصل میکنیم آن وقت بنا بر فرض دو مثلث با ا ه و
ا د مساوی میشوند پس با د = ا ه و لی در مثلث ا ه د ضلع ا ه د
(ا د + ا ه) و چون در این نامساوات ا ه را بدل کنیم به با د چنین میشود
ا د + ا ه > ا د + با د یعنی ا د > ا ب ح

و بالعکس اگر دو ضلع ا ب و ا د از مثلث ا ب ح مساوی باشند
بدو ضلع ا ح و ا د از مثلث ا ح د و ضلع سیم ح د از مثلث اول طول
باشد از ضلع سیم ح د از مثلث دوم کوئیم که زاویه با ا ح اعظم است از
زاویه با د زیرا که اگر این زاویه کوچکتر بود از ا ح د لازم می آمد که ح د
اقصر باشد از ا ح د و این خلاف فرض است و اگر مساوی میبود با ح د
آن وقت بنا بر فرض ح د مساوی میشد با ح د و این حکم نیز خلاف فرض است

قضیه دوازدهم

هرگاه سه ضلع مثلث مساوی باشند یا سه ضلع مثلث دیگر
نظیر نظیر آن دو مثلث متساوی هستند

مثلاً ضلع $ا ب = د ه$ و $ا ج = د ز$

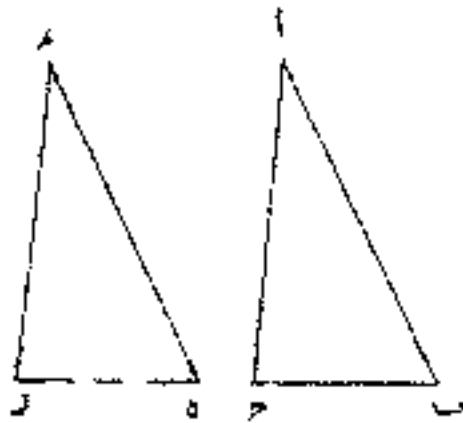
و $ب ج = د ز$ و میگوئیم زاویه $ا = د$

و $ب = د$ و $ج = ز$

بنابراین اگر زاویه $ا$ باشد بزرگتر بود از

زاویه $د$ چون دو ضلع $ا ب$ و $ا ج$ مساوی

هستند و ضلع $د ه$ و $د ز$ نظیر نظیر



پس حکم قضیه سابقه ضلع $ب ج$ اطول می شود از $د ز$ و اگر زاویه $ا$ را کوچکتر از $د$

فرض کنیم آنوقت لازم می آید که ضلع $ب ج$ اقصر باشد از $د ز$ و چون $ب ج$

مساوی با $د ز$ فرض شده زاویه $ا$ بتواند عظم باشد از $د$ و نه اصغر پس مساوی

است و همین وجه ثابت میکنیم که زاویه $ب = د$ و زاویه $ج = ز$

مشروح ملاحظه نمایند که هر دو زاویه متساوی مقابل شده اند به ضلع مساوی

مثلاً دو زاویه متساوی $ا$ و $د$ مقابل اند به ضلع مساوی $ب ج$ و $د ز$

قضیه سیزدهم

در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویه مقابل به دو ضلع

بنابراین اگر $ا ب = ا ج$ باشد زاویه $ب = ج$

قاعدۀ $ب ج$ را میگیریم آنوقت در دو مثلث $ا ب ج$ و $ا ج ب$ سه ضلع

نظیر نظیر متساوی است و مشترک است بقضای $ا ب = ا ج$ و $ب ج = ج ب$

متساوی متساوی

نظراً ضلع $ا ب = ا ج$

بنابراین زاویه $ب = ج$

باب

مقاله اول

۲۰

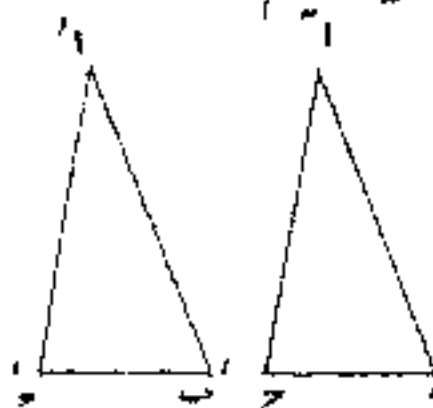
بعد پس حکم قضیه سابقه زاویه Γ مساوی می شود با Δ
 نتیجتاً هر مثلث متساوی الاضلاعی متساوی الزوا یا منبسط
 شرح - از متساوی دو مثلث Δ و Γ لازم آمد که زاویه Γ با Δ
 Δ و Γ با Δ پس این دو زاویه اخیر قائمه اند و بنا بر این خط معلوم از زاویه
 مثلث متساوی الساقین بر وسط قاعده عمود است بر این قاعده و زاویه را
 راضف میکند

در مثلث غیر متساوی الساقین هر ضلع را میتوان قاعده فرض نمود و آنوقت
 ریشش زاویه است که مقابل باشد بان ضلع ولی در مثلث متساوی الساقین
 قاعده مخصوصاً ضلع نیم است غیر از دو ساق متساوی

قضیه چهارم در مثلث

هرگاه دو مثلثی دو زاویه متساوی باشند ضلعین مقابل بان دو
 زاویه متساوی هستند

مثلاً فرض میکنیم زاویه Δ با Γ و Δ با Γ و میگوئیم Δ با Γ



بنابراین - مثلث Δ و Γ را مساوی بمانند

Δ با Γ رسم میکنیم خطیچه زاویه Δ با Γ و

Δ با Γ و ضلع Δ با Γ و از آن معکوساً

منطبق میکنیم بر Δ و بروجیکه ضلع Δ با Γ

واقع شود بر Δ یعنی Δ بر Γ و نقطه Δ بر Γ

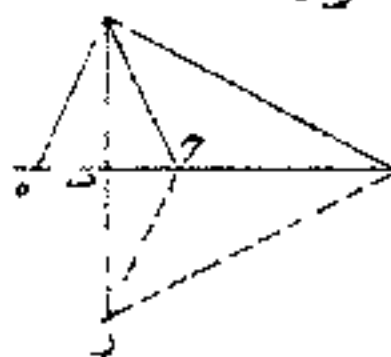
و چون زاویه Δ با Γ و Δ با Γ واقع می شود بر استقامت Δ با

و نقطه Δ بر Γ و نتیجه می شود Δ با Γ و بنا بر این Δ با Γ

مجاوره اند زاویه $ا ه$ قائم است پس $ا ه$ عمود باشد بر $ح د$
 ثانیاً فرض میکنیم که از نقطه $ا$ بتوان دو عمود $ا ه$ و $ا ب$ را بر $ح د$ آخر
 نمود پس یکی از آن دو عمود مثلاً $ا ه$ را امتداد میدسیم انقدر که $ا ه$ مساوی شود
 با $ا ب$ و خط $ا ب$ را وصل میکنیم آنوقت مثلث $ا ه ب$ مساوی میشود با $ا ب$
 چونکه دو زاویه $ا ب$ و $ا ه ب$ قائم اند و ضلع $ا ه = ا ب$ و ضلع $ب ه$ مشترک
 است پس زاویه $ا ب ه$ مساوی میشود با $ا ه ب$ و چون زاویه $ا ب ه$ قائم است
 $ه ب ا$ نیز قائم میشود و در اینصورت چون مجموع دو زاویه مجاوره $ا ب ه$ و $ه ب ا$
 دو قائم باشد باید خط $ا ب$ مستقیم باشد و آنوقت لازم آید که بتوان با این دو نقطه
 $ا و ا$ را بدو خط مستقیم وصل نمود

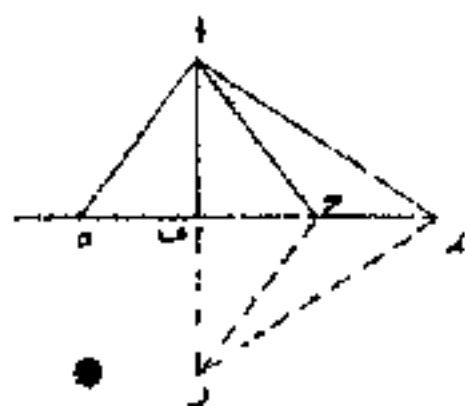
قضیه پنجم

چون از نقطه $ا$ واقع در خارج خط $ح د$ عمود $ا ب$ را بر آن خط فرود آوریم
 و خطوط $مایل$ $ا ه$ و $ا د$ و غیره را بر نقاط مختلفه آن خط وصل کنیم
 اولاً عمود $ا ب$ اقصر است از هر خط $مایی$ و ثانیاً هر دو $مایل$ مساوی البعد از
 موقع عمود مثل $ا د$ و $ا ه$ که بدو یکدست مساوی $ب د$ و $ب ه$ در هر
 واقع شده اند متساوی هستند و ثالثاً از هر دو خط $مایی$ مثل $ا د$ و
 $ا ه$ یا $ا و$ آنکه از موقع عمود با بعد باشد طول است



بر آنها عمود $ا ب$ را با اندازه خود تا نقطه $د$ امتداد
 میدیم و دو خط $ر د$ و $ر ه$ را وصل میکنیم
 آنوقت مثلث $ب د ر$ مساوی شود با $ب ه ر$
 چونکه دو زاویه $ب د ر$ و $ب ه ر$ قائم اند و

و ضلع $د$ مشترک است و ضلع $د$ در $د$ با پس و $د$ ضلع $د$ سیم دور
 مساوی شود با ضلع $د$ سیم دور و چون خط $د$ سیم دور $د$ و $د$ اقصر است از $د$ دیگر
 و در پس $د$ نصف $د$ و $د$ اقصر شود از
 $د$ نصف $د$ و $د$ یعنی $د$ و $د$ اقصر است از



هر خط مایل

ثانیاً چون $د$ را مساوی $د$
 فرض کنیم و $د$ مشترک است و زاویه

$د$ $د$ $د$ مثلث $د$ $د$ مساوی می شود با مثلث $د$ $د$ و
 و ضلع $د$ و $د$ مساوی گردند یعنی دو مایل مساوی البعد از موقع عمود متساوی باشند
 ثالثاً در مثلث $د$ مجموع دو خط $د$ و $د$ اقصر است از مجموع دو ضلع
 $د$ و $د$ و $د$ و $د$ برابرین $د$ نصف $د$ و $د$ اقصر شود از $د$ نصف $د$ و

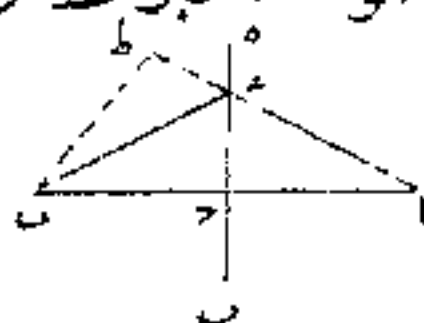
یعنی از دو خط مایل هر کدام بقیه باشد از موقع عمود اطول است

فصل چهارم - فاصله یقینی از نقطه داخلی بطول عمود مشخص شود چنانکه اقصر است از سایر عمود
 فصل پنجم - از نقطه مفروضه می توان به خط متساوی نخطی وصل نمود و الا لازم بود

در یک سمت سمت عمود و دو مایل متساوی واقع شود

قضیه هجدهم

چون از نقطه $د$ واقع بر وسط خط $د$ عمود $د$ و $د$ را بر آن خط اخراج



کنیم گوئیم اولاً هر نقطه از این عمود متساوی
 البعد است از طرفین $د$ و ثانیاً هر نقطه
 واقع در خارج عمود غیر متساوی البعد

اگر همان دو طرف

بر آنها اول چون $ا د = ح ب$ دو میل اند و در مساوی البعد میشوند
از موقع عمود و بنا بر این مساوی باشند و همچنین دو میل اند و در
از و در پس معلوم شد که هر نقطه از عمود مساوی البعد است از طرفین او
ثابت است - ط نقطه است خارج عمود و دو خط $ط ا$ و $ط ب$ را وصل میکنیم پس یکی
از این دو خط عمود را بر نقطه $ط$ قطع میکنیم خط $ط د$ را نیز وصل میکنیم از وقت $د ب$
 $= د ا$ ولی $ط ب$ اقصر است از مجموع $ط د + د ب = ط د + د ا = ط ا$ پس
 $ط ا$ یعنی هر نقطه که در خارج عمود فرض شود غیر مساوی البعد است از طرفین
تقیماً - هر خط که نقاطش دارای خاصیت مشترک باشد دو نقطه $ط ا$ خارج خط
از این سه کوشیم مثل خط $ه د$ که مکان بند سی نقاط مساوی البعد است از دو نقطه $ا و ب$
قضیه ششم نویزده شد

هرگاه در دو مثلث قائم الزاویه و نزویک ضلع مساوی باشند آن
دو مثلث مساوی هستند

مسئله و تراجه $= د و$ ضلع $ا ب = د ه$ پس کوئیم مثلث $ا ب د$ مساویت با $ه د و$



بر آنها در این دو مثلث اگر

ضلع سیم مساوی بود

ما در حکم ثابت میشد حال فرض

میکنیم مساوی نباشند و $د و$ بزرگتر باشد از قطر خود پس $ب ح$ را مساوی $ه د$

جدا میکنیم $ا ح$ را وصل بنماییم آنوقت مثلث $ا ب ح$ مساوی میشود با $ه د و$

چونکه دو زاویه $ب و ه$ قائم اند و مساوی و ضلع $ا ب = د ه$ و ضلع $ب ح$

= در پس اح = مد و لی بفرض در مساوی است با ا د پس اح = ا د
و این متساوی صحیح نباشد چو کمه بایل ا د بعد است از موقوع عمود و پس م
اختلاف نداشته باشد با ه و مثلث ا ب د مساوی باشد با ه و

قضیه یکم

در دو مثلث قائم الزاویه هرگاه دو زاویه متساوی باشند آن مثلث
متساوی هستند



میکنیم برابر د بروچیکه د و واقع شود بر ا د آنوقت زاویه د چون مساویست
با ا ضلع د ه واقع میشود بر استقامت ا ب و در این صورت د ه واقع خواهد شد
بر استقامت د ف والا لازم آید که از د بتوان دو عمود بر ا ب فرود آورد
پس نقطه ه منطبق میشود بر ف و دو مثلث متساوی میگردد

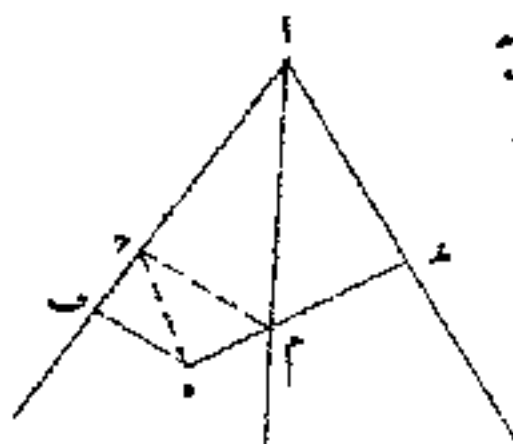
قضیه یکم

اولاً هر نقطه که مثلث که فرض شود بر خط متصف الزاویه ب ا د متساوی
البعد است از ضلعین الزاویه و ثانیاً هر نقطه مثله که در خارج

این خط فرض شود غیر متساوی البعد است از همان دو ضلع

پس ه ا - ا ق لا از نقطه م واقع بر منصف الزاویه ب ا د دو عمود م د
و م ه را بر ا د و ا ب فرود آوریم تا دو مثلث قائم الزاویه م ا د و م ا ب
متساوی گردند چونکه وتر م ا در هر دو مشترک است و دو زاویه م ا د و م ا ب متساوی

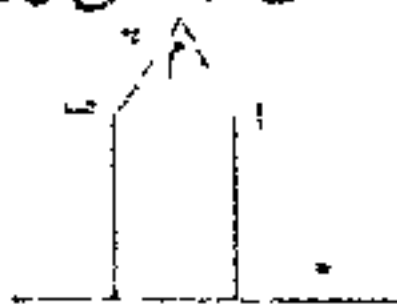
پس م د = م ه



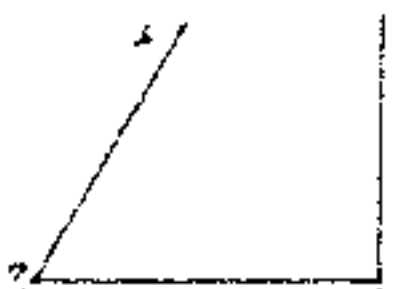
ثانیاً از نقطه واقع در خارج منصف الزاویه
دو عمود مساوی را بر آید و از هر
آورید و از نقطه م آنجا که خط مساوی منصف
الزاویه را قطع میکند عمود مساوی را بر آید
فرود آورید و را وصل کنید آنوقت

قصیدہٴ ناز و محرم

هرگاه دو خط ad و be عمود باشند بر خط ثالث cd پس متوازی هستند
چونکه اگر مستدلاق میشدند مثلاً بر نقطه m آن
وقت لازم می آید که از آن نقطه دو عمود بر cd
منشعب و آمده باشند



حکم - اگر یکی از دو خط اب و عمود باشند بر د و
دیگر مایل بر یک باشد امتداد متلاق می شوند
این حکم ظاهراًست و محتاج بدلیل نیست



قطریت و سیر

بر نقطہ میثوان خطی بموازات خط دیگر مرور داد و بیش از یک مواز
ممکن نیست

بر آنها از نقطه عمود آمد را بر مد

فرد آورید و از همان نقطه او را عمود

بر آمد پس دو خط از مد متوازی شوند

و حال میگوئیم که غیر از خط از هر خط

مثل باط که بر او گذر کند دیگر موازی نباشد و چونکه

مد عمود است بر ا و باط یل است نسبت با آن

قضیه ششم

هرگاه دو خط از ا و ب متوازی باشند و خط ج عمود شود یکی از

از آن دو مثل بر ا ب پس عمود باشد بر خط دیگر

بر آنها اولاً ظاهر است که ج باید تلاقی نماید

و را و انا لازم آید که بر نقطه و دو خط موازی

باشد موازی است و بعد از وقوع ملاقات میثم

عمود شود بر و و الا و یل باشد بر ج

و ا ب عمود است بر آن و در این صورت مثل

شوند و این خلاف فرض است

قضیه هفتم

هرگاه دو خط ا و ب متوازی باشند با خط ثالث و پس متوازی

هستند نسبت به یکدیگر

چونکه اگر این دو خط ا و ب متوازی

گردند بر نقطه مثل م آنوقت لازم آید که

مقاله اول

که از این خط بتوان دو خط بموازات ه و رسم نمود

حلول

هرگاه دو خط اف و ح را خط ثالث ه و

قطع کند هشت زاویه حول دو نقطه فصل مشترک

ط و ح احداث شود

چهار زاویه ا و م و ه و ر واقع مابین

دو خط اف و ح در زاویای داخله گوئیم و

چهار زاویه دیگر را خارج

و دو زاویه داخله ا و ه را که طرفین قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متبادله

داخله گوئیم و دو زاویه داخله و خارج ا و م را که در یک سمت قاطع واقع شده اند

و غیر مجاوره اند متقابل گوئیم

و دو زاویه خارج مجاوره م و ه را که در طرفین قاطع واقع شده اند متبادله خارج

قضیه یکم

چون دو خط متوازی را خط ثالثی قطع کند گوئیم آن دو زاویه متبادله

متساوی باشند و ثانیاً دو زاویه متبادله خارج متساوی باشند و ثالثاً

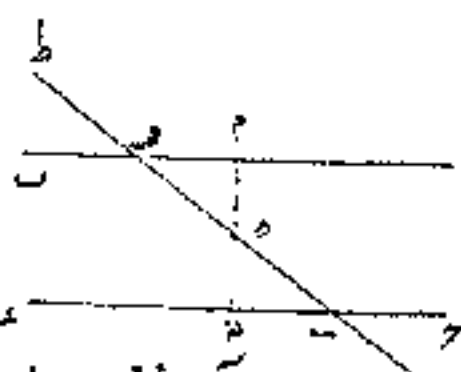
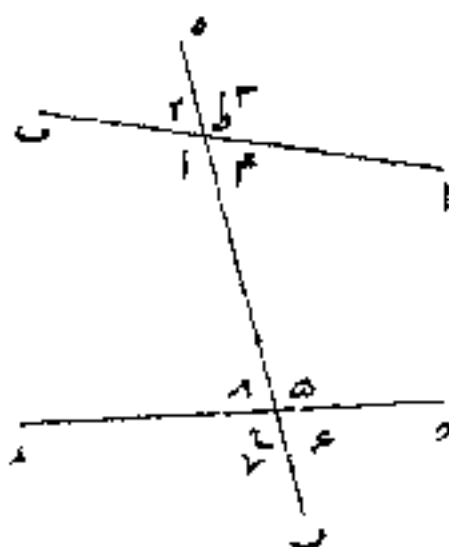
دو زاویه خارج و داخله متقابل متساوی

ناستند و رابعاً دو زاویه داخله واقع در

یک سمت قاطع مجموعشان مساوی باشند و ثانیاً

برعکس دو متوازی است

قاطع ط را پس از نقطه ه وسط رسم نموده م را برابر فروه م را بر خط عمود م شود



م. ب. ج. د. و دوشان قائم الزاویه م. د. و ه. ن. ع. متساوی می‌شوند چونکه
بفرض د. و وتر ه. د. و ه. ع. متساوی هستند و د. و زاویه م. د. و ه. ن. ع.
نیز متساوی و از تساوی این دو مثلث د. و زاویه متبادله داخل م. د. و ه. ن. ع.
متساوی می‌شوند

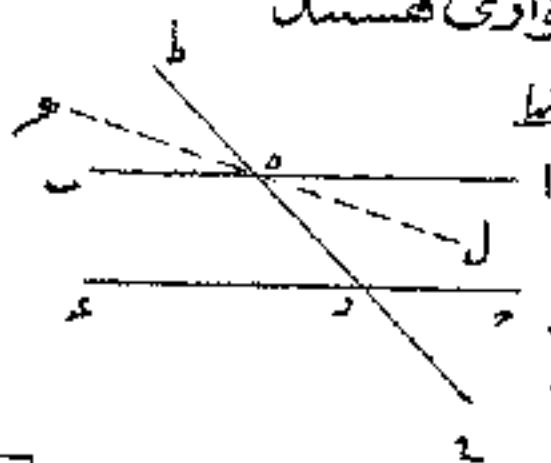
و نیز بهمان واسطه د. و زاویه ب. ر. و و ه. د. که تمام د. و زاویه م. د. و ه. ن. ع. قائم
ثانیاً د. و زاویه متبادله خارجیه طرف و ح. ع. متساوی هستند چونکه متقابله
با د. و زاویه متبادله داخلیه م. د. و ه. ن. ع.
ثالثاً د. و زاویه متقابله طرف و ر. و ع. متساوی هستند چونکه طرف
ا. ر. و ا. ر. ع. = ط. ع. د.

رابعاً مجموع د. و زاویه ب. ر. و و ر. و ع. متساوی است با د. و قائمه چونکه
ب. ر. و + ا. ر. و = ط. ع. د. و ا. ر. و = ر. و ع.

قضیه ششم و کیفیت

هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند بر وجهی که د. و زاویه متبادله داخلیه
شوند یا د. و زاویه متبادله خارجیه یا د. و زاویه خارجیه و داخلیه متساوی
و یا مجموع د. و زاویه داخلیه یا د. و زاویه درین سمت قاطع متساوی شود یا د.
قائم در این چهار صورت اند و خط متوازی هستند

دو خط متوازی است و د. و خط



قاطع ط. ع.

برهان کونیم اگر د. و زاویه متبادله داخلیه ا. د. و
و ه. د. متساوی باشند ا. ب. موازی است

مقاله اول

۳۰

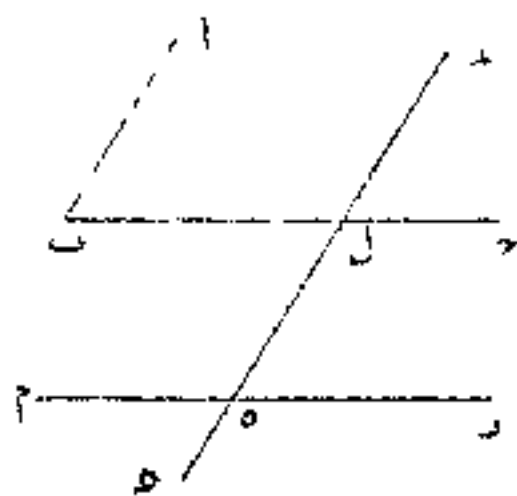
با $د$ و $ا$ بر نقطه $ه$ خط $ه$ ل را موازات $ح$ رسم میکنیم وقت دو زاویه
 $ل$ و $و$ و $د$ و $و$ چون متبادله داخلند متساوی باشند و بنا بر فرض $ا$ و
 مساوی بود با $د$ پس $ا$ و $د$ مساوی میشود با $ل$ و $و$ این محال است
 ثانیاً اگر دو زاویه متبادله خارجیه $ط$ و $ف$ و $و$ و $د$ متساوی باشند و
 زاویه $ا$ و $و$ و $د$ مقابل به رأس با آن دو زاویه متساوی میشوند و آنوقت
 بنا بر حکم اول $ا$ و $و$ موازی میشود با $ح$

ثالثاً اگر دو زاویه خارجیه و داخله متقابل $ط$ و $ف$ و $و$ و $د$ متساوی باشند
 و چون $ط$ و $ف$ مساویست با $ا$ و $د$ پس $ا$ و $د$ مساوی شود با $و$ و $د$ و حکم اول
 $ا$ و $و$ موازی شود با $ح$

رابعاً اگر مجموع دو زاویه $ب$ و $و$ و $د$ مساوی باشد با دو قائمه و چون
 $ب$ و $و$ + $ا$ و $د$ = $ا$ و $د$ پس $ا$ و $د$ موازی شود با $ح$

قضیه هفتم و هشتم

هرگاه اضلاع دو زاویه متوازی باشند پس آن دو زاویه متساوی
 هستند یا تمام همدیگر اند تا دو قائمه

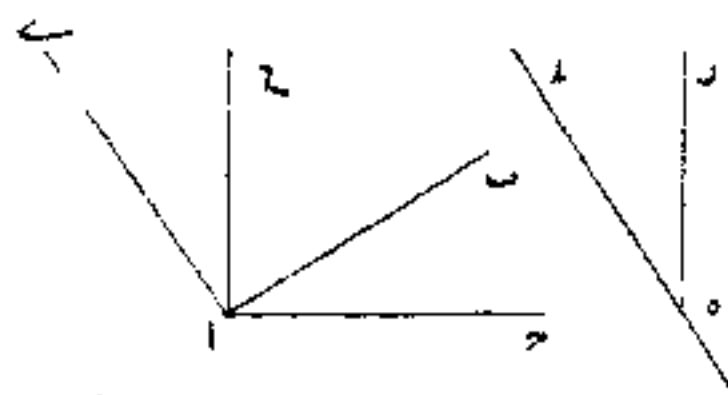


دو زاویه مفروضه $ا$ و $ب$ است و $د$ و $و$
 که اضلاعشان متوازی هستند و متساویند
 پس کوئیم این دو زاویه متساوی هستند زیرا
 که دو زاویه $ب$ و $د$ و $و$ و $ا$ چون متقابلند
 متساوی باشند و همچنین $ب$ و $د$ = $ا$ و $و$
 پس $ا$ و $ب$ = $د$ و $و$

ثانیاً دو زاویه مفروضه $ا ب ح$ است و همه $م$ که اضلاعشان متوازی باشند
ولی دو ضلع $ب ا و ه ه$ در یکجمله مستند اند و دو ضلع $ب ح و ه ه$ در دو جهت مخالف
کوچیم تمام به یکدیگر انداد و تمامه زیرا که همه $م$ تمام شده است و در مساویت آید

قضیه بیست و نهم

هرگاه اضلاع دو زاویه عمود باشند بر هم دیگر اند و زاویه متساوی
هستند یا تمام هم دیگر



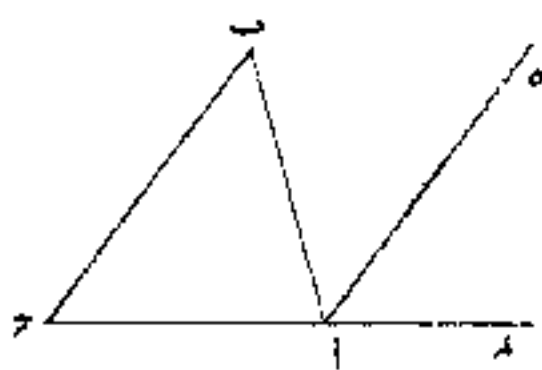
و زاویه که اضلاعشان عمود
باشند بر هم دیگر است
و در پس از نقطه انحطاط

عمود میکنیم بر $ا ب$ و خط $ا ح$ را بر $ا ح$ وقت این دو خط متوازی میشوند با
هم و $ه ه$ و همه مستند اند در یکجمله پس زاویه $ا ب ح = ه ه د$ ولی $ا ب ح + ا ب د =$
 $ا ب ح + ا ب د = ا ب ح + ا ب د = ا ب ح + ا ب د$

مشخص - هرگاه بجای $ه ه$ و زاویه $ه ه ط$ را اختیار کنیم که حادث شده است
باین $ه ه$ و استقامت $ه ه$ ظاهر است که این زاویه تمام $ب ا ح$ است تا دو

قضیه بیست و دهم

مجموع زوایای هر مثلث مساویست بدو قائمه



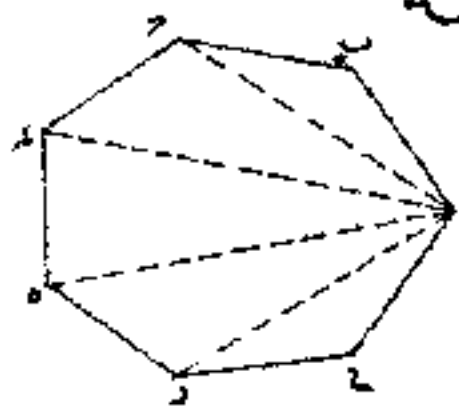
نویسند $ا ه$ را موازی $ب ح$ رسم
کنند و $ا ح$ را امتداد دهند و یک
زاویه $ا ح د$ و $ه ه$ چون نسبت
به دو متوازی $ب ح و ه ه$ و $ا ح$ و $ا ح$ قاطع

۱- مقابل اندشادی باشند و دوزاویه α و β و γ چون متساوی باشند
نسبت بهمان دوزاوی و تقاطع α متساوی هستند مجموع زوایای مثلث مساوی
شد مجموع سه زاویه α و β و γ و $\alpha + \beta + \gamma$ عاده حول نقطه α و در یک سمت α
و جمع ثانی مساویست با دو قائمه پس جمع اول نیز دو قائمه است
نتیجه ۱- در هر مثلث ممکن نیست بیش از یک زاویه قائمه موجود شود و بدلیل آن بیش
از یک زاویه منفرجه

- ۲- در مثلث قائم الزاویه مجموع دو زاویه حاده مساویست بیک قائمه
۳- در مثلث هرگاه مجموع دو زاویه معلوم باشد آنرا از دو قائمه بفرق کنیم باقی زاویه معلوم است
۴- در مثلث α و β زاویه خارج γ عاده حاده یا منفرجه ضلع α و β است
۵- مساویست مجموع دو زاویه داخل α و β و γ

قضیه سی و یکم

مجموع زوایای داخله هر کثیرالاضلاع محدب مساویست بعد
اضلاع منتهای دو ضرب بدو قائمه



منها یکی از رؤس مثلث را اقطاری کنیم
که منتهی شوند بجمع رؤس غیر مجاوره تا کثیرالاضلاع
بمثلثات قسمت شود و عدد این مثلثات بزرگ
است با عدد اضلاع منتهای و زیرا که چون

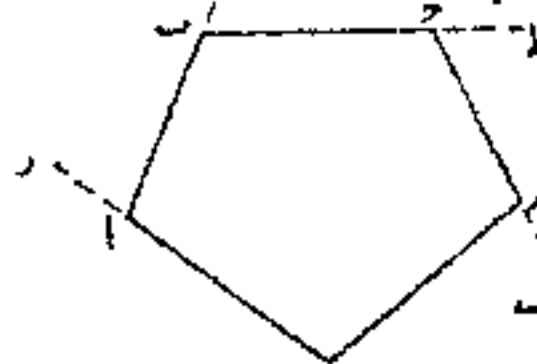
نقطه α را رأس مشترک جمع قرار دهیم قاعده هر کدام ضلعی میشود از کثیرالاضلاع غیر از
و در مثلث طریقی که هر کدام صاحب دو ضلع میشوند و مجموع زوایای این مثلثات
مساویست مجموع زوایای کثیرالاضلاع و اینجاست جمع بعد و مثلثات مرکب از

دو قائمه است یعنی دو واحد کمتر از عدد اضلاع شامل و قائم است پس اگر عدد اضلاع را n فرض کنیم مجموع زوایای کثیرالاضلاع بحسب قائمه چنین میشود

$$2n - 2 \text{ یا } 2(n - 2)$$

قضیه سی و دوم

چون جمع اضلاع کثیرالاضلاع محدب را بیل جهت امتداد دهیم مجموع زوایای خارجی که حادث شود مساویست با چهار قائمه



پس هر زاویه داخله با ضافه خارجه مجاوره

مساویست با دو قائم پس مجموع زوایای داخله

و خارجه کثیرالاضلاع مساویست با $2n$ قائم

(n عدد اضلاع است) و چون مجموع زوایای

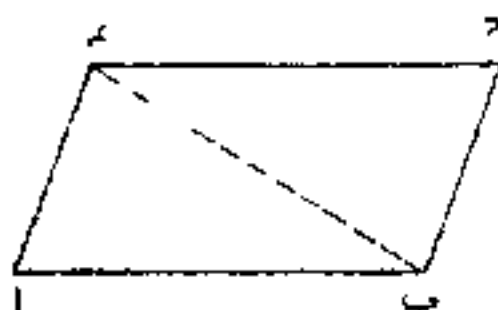
داخله مساوی شد با $(2n - 2n)$ قائم پس مجموع زوایای خارجه بقدر نقصان جمع است

برشانی یعنی $2n$ قائم

قضیه سی و سیم

در شکل متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل متساوی باشند و همچنین

هر دو زاویه مقابله



پس هرگاه - قطری را وصل کنید

آنوقت در دو مثلث abc و cd

ضلع ac مشترک است و نسبت به خط

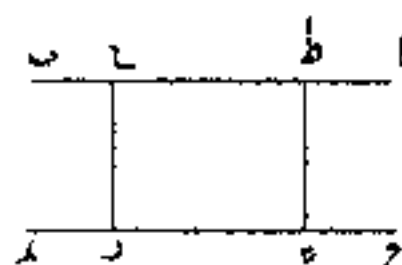
متوازی ad و bc زاویه $abc =$

adc و $bad =$ و نسبت به خط متوازی ab و cd زاویه $bad = bcd$

مقاله اول

پس و این دو مثلث مساوی باشند و ضلع $ا ب$ مقابل زاویه $ا د ب$ مساوی شود با ضلع $د ب$ مقابل زاویه $د ب د$ و همچنین ضلع $ب د$ مساوی شود با ضلع $د ب$ یعنی که هر دو ضلع مقابل مساوی هستند ثانیاً از تساوی این مثلث زاویه $ا م د$ مساوی شود با زاویه $د و ا$ و زاویه $ا د د$ مرکب از دو زاویه $ا د ب$ و $د ب د$ = زاویه $ا د د$ مرکب از دو زاویه $د ب د$ و $ا د ب$ یعنی که دو زاویه مقابل مساوی باشند

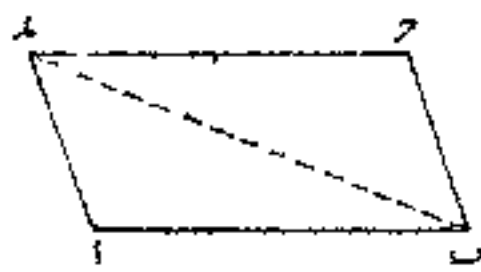
نتیجه ۱ - هر دو خط متوازی مثل $ا ب$ و $د ب$ که واقع باشند باین دو مستوی دیگر $ا د$ و $د ب$ مساوی باشد



نتیجه ۲ - فاصله هر دو خط متوازی هر جایکی باشد یکسان است زیرا که چون از دو نقطه $ط$ و $ا$ از موازی $ا ب$ دو عمود $ط و$ و $ا و$ را اخراج کنیم این دو موازی شوند و $ا و$ و $ط و$ واقع شده اند باین دو موازی

قضیه ۳ - هرگاه در دو اضلاع $ا ب$ و $د ب$ هر دو ضلع مقابل مساوی باشد

$ا ب = د ب$ و $ا د = د و$ و $د ب$ کو نیم اضلاع متساوی نیز متوازی هستند و شکل متوازی الاضلاع است



برگذاشته قطری $ا و$ را وصل میکنیم و دو مثلث $ا د و$ و $د ب و$ چون اضلاعشان برابرند و ضلع $ا د$ مساوی است با ضلع $د ب$ و زاویه $ا د و$

مقابل با ضلع $ا ب$ مساویست با زاویه $د ب و$ و متقابل با ضلع $د و$ پس و ۲۷

ضلع ad موازیست با bc و بهمان دلیل ab موازیست با dc پس شکل $abcd$ متوازی الاضلاع است

قصیدہ سی و پنجم

مرکاه در ذوار بقاع ضلوعی (شکل سابق) دو ضلع مقابل اب و ح و
متاوی و متوازی نباشند پس دو ضلع دیگر نیز متساوی و متوازی
و شکل اب ح و متوازی الاضلاع است

بر مفاصل قطره را وصل کنید آنوقت چون اب موازی است با cd و cd موازی
 متباینه داخله اب cd و cd متساوی است و cd و cd نیز $ab = cd$ و
 ضلع cd مشترک پس مثلث اب cd مساویست با cd و cd پس ضلع
 $ab = cd$ و زاویه $ab = cd$ و بنا بر این ab موازیست با cd
 و شکل اب cd متوازی الاضلاع است

قصیدہ سی کو ششم

دو قطر AO و BO از متوازی الاضلاع $ABCD$ منصف میگردند
بر نقطه تقاطع O

برای در مقایسه دو مشتاد ۱۰۰ و ۱۰۰ ضلع

المسحوق وزاوية المماس = حرفه $\frac{2}{3}$ وزاوية

۵۱ = ۵ حرف می باشد و مثلث تساوی باشند و ضلع ۱۵ مقابل ۵ و ۵ = ۵ حرف و ضلع

۱۰۰ مقابل شراویہ ۱۰۰ ۱۰۰

شرح - در شکل معین و ضلع اف و ب مساوی باشد و دو مثلث ا ب و ب ج

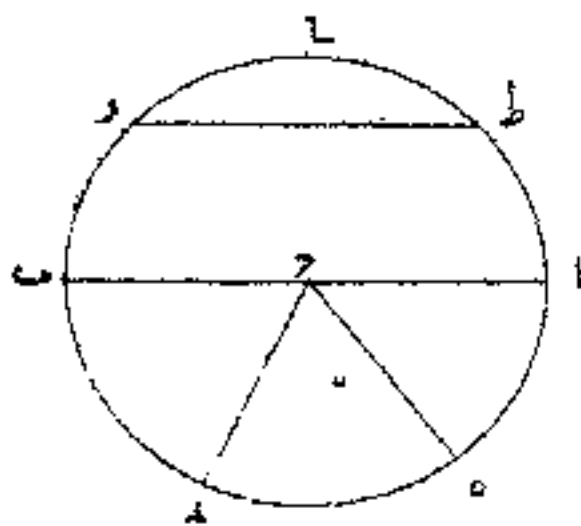
چون مسلمانان نظیر بنظر مساوی باشند و بنا بر این راوی به اهل

تفاوتی که در معین و قطر بر و ایامی قائمه متقاطع شوند

مقاله سوم

جداول

۱ - محیط دایره خطی است منحنی که جمع نقاطش یک فاصله باشند از نقطه داخل که موسوم است بمركز و سطح دایره و معنی است محدود و محصور بانحنای منحنی و کلمه دایره را هم بر محیط اطلاق کنیم و هم بر سطح ولی از سیاق کلام مقصود معلوم شود و در معنی اختلاف کلی است



۲ - هر کدام از خطوط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و غیره واصله با هم مرکز و نقطه از محیط را نصف قطرها شعاع گوئیم و خط اب را که مرکز گذشته و از طرفین محیط منتهی گشته قطرها گوئیم

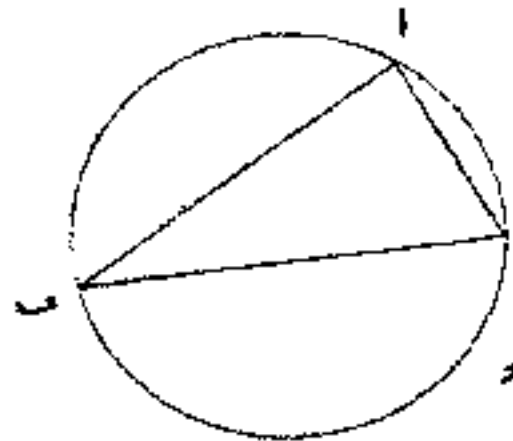
و بنا بر تعریف دایره جمع اشعه مساوی باشند و همچنین جمیع اقطار و هر قطر مضاعف شعاعی باشد

۳ - هر یک دایره قطعه است از محیطش مثل د ب ط و تر خطی است مثل د ط و اصل ما بین ط و ج و ج و قوس

عم قطع دایره جزئی است از محیطش محصور ما بین قوس و وتر و وتر د ط همواره

مقابل است بر و قوس $\widehat{B\Gamma}$ و $\widehat{B\Delta}$ و بنا بر این بدو قطعه $\widehat{B\Gamma}$ و $\widehat{B\Delta}$ که بر یک
مکمل می‌شود

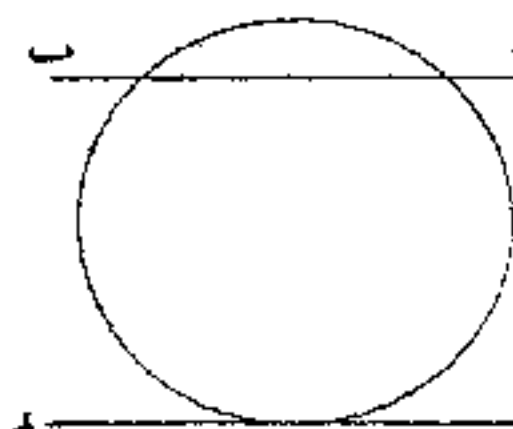
۵- قطاع دایره جزئی است از آنچه در میان قوس $\widehat{B\Gamma}$ و $\widehat{B\Delta}$ و دو نصف قطر $\widehat{B\Gamma}$ و $\widehat{B\Delta}$
ع- خط محاط در دایره است که طرفین



مشتق باشد محیط مثل خط AC
زاویه محاطه است که رأسش واقع باشد
بر محیط و حادث باشد میان دو وتر مثل زاویه $\widehat{ABC}$
مثلاً محاطی است که رأسش واقع باشد

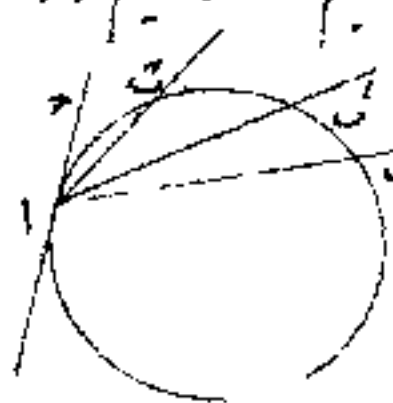
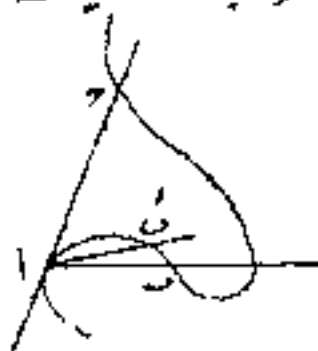
بر محیط مثل مثلث ABC و بطور کلی شکل محاطی است که رؤس جمیع زوایایش واقع
باشد بر محیط و در این صورت دایره را نسبت بآن محیط کویتم

۶- قاطع خطی است که محیط را بر دو نقطه قطع
کند مثل خط AB



۸- خط مماس است که با دایره در یک
نقطه مشترک باشند همیشه مثل خط CD

و نقطه مشترک M را نقطه تماس کویتم
۹- همچنین دو دایره را نسبت بهم مماس کویتم هرگاه مشترک باشند در یک نقطه همیشه



شرح- بطور کلی مماس
منحنی حد اوضاع قاطع است
بنا بر آنکه حول نقطه منحنی آنقدر
دوران کند که نقطه مقطع دیگر

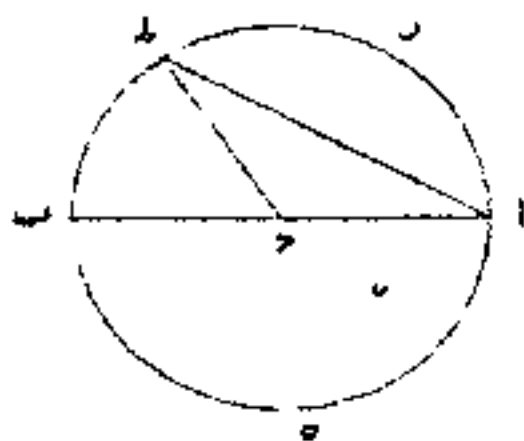
مقاله دهم

۳۸

باید بر نقطه اول منطبق شود پس اگر منحنی مسدود باشد و قاطع پیش از دو نقطه با او ملاقات نکند مثل دایره ظاهر است که چون آن دو نقطه فصل مشترک در یک نقطه جمع شوند آن خط قاطع با منحنی در نقطه پیش مشترک نباشند و آنوقت میتوان گفت که مماس خطی است که بر بیشتر از یک نقطه با منحنی مشترک نباشد ولی تعریف اول بجمع انواع خطوط و منحنیها
۱۰- کثیر الاضلاع را محیط بر دایره گوئیم هرگاه جمع اضلاعش دایره را لمس کند و در چنین حالت دایره را نسبت بان محیطه گوئیم

قضیه اول

در دایره هر قوس مثل ab سطح و محیطش را نصف کند
برقضا - چون بسیل انطباق بر قاعده مشترک



اب شکل اه را قرار دسیم برابر
خط منحنی اه درست منطبق خواهد شد بر
ا د و ا تا لازم آید که بعضی نقاط محیط
مختلفه بعد باشند از مرکز و این خلاف
تعریف دایره است

قضیه دوم

در دایره هر وتر اقصر است از قطر
نویسها چون در شکل سابق دو شعاع oa و ob را بر طرفین وتر ab وصل کنیم خط ab
 $\angle aob$ یعنی $\angle aob$
فدیتجس - طول خطی که میتوان در دایره می ط نمود قطر است

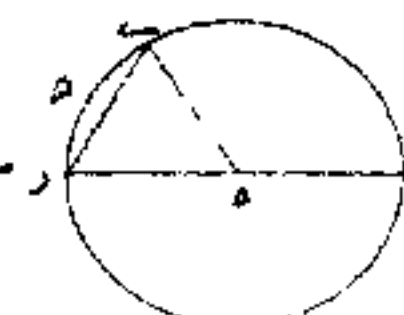
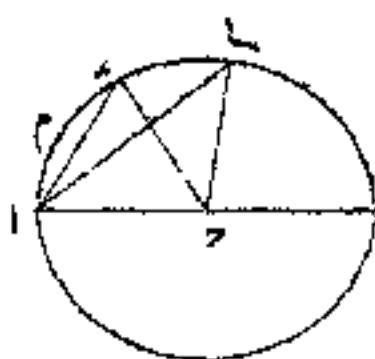
قضیه ششم

هیچ خط دایره را بیش از دو نقطه قطع نکند
 زیرا که اگر مثلاً بر سه نقطه او را قطع میکرد این سه سه بیگانه و صدم بود و از مرکز که فاصله
 لازم می آید که توانیم از نقطه سه خط مساوی بکشیم و وصل کنیم و اما (علامت قضیه ۱۱)
 مقاله اول است

قضیه چهارم

مساویه

در یک دایره یا در دو دایره متساویه قوس متساویه وترها باشند با و تا
 و بالعکس او ترها متساویه و ترها باشند بقی متساویه



مثلاً شعاع ا د مساویست
 شعاع ه د و قوس ا م د
 = ر ک ب و یکو کنیم و تر ا د
 = ر ب

برهان - چون قطرها = ر ط نصف دایره ا م د منطبق شود درست
 بر نصف دایره ر ن ط منحنی ا م د با تمام منطبق شود و منحنی ر ن ط
 و چون قوس ا م د را مساوی ر ن - فرض نموده ایم نقطه د واقع میشود بر
 - د و تر ا د مساوی میشود با ر ب

حال فرض میکنیم و تر ا د = ر ب و یکو کنیم قوس ا م د = ر ه -
 برهان چون شعاع ح د و ه - وصل کنیم دو مثلث ا ح د و ر ه د
 نظیر بنظر مساوی میشوند ا ح = ر ه و ح د = ه د و ا د = ر د و بنا بر این دو
 مثلث متساوی باشند و ۱۲ و ۱۳ پس زاویه ا ح د = ر ه د و چون نصف دایره

مقاله دوم

۴۰

آمدن را بر مساوی خود وسط قرار دسیم نظر بناوی دوزاویه مذکوره شعاع $ح د$ و $ق$ شود بر $ه$ و نقطه $د$ بر $ه$ پس قوس $ا م د$ مساوی شود با $و ن$

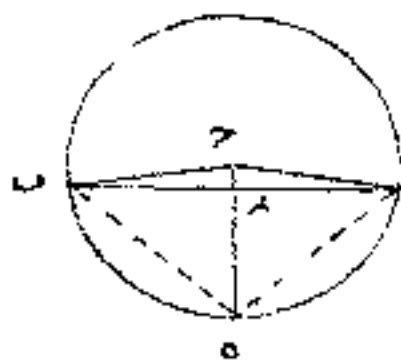
قضیه ششم

در یکدایره یا دو دایره متساویه هر قوس که اعظم باشد موتر است بر طول و بالعکس و ترا طول مقابیل باشد بقوس اعظم مشروط بر آنکه قوسهای مفروض کوچکتر باشند از نصف محیط

بونها در شکل سابق قوس $ا$ بزرگتر است از $و ن$ و قوس $ا م د$ راست است و $و ن$ چپ میکنیم و دو شعاع $ح د$ و $ح و$ را وصل میکنیم آنوقت دو ضلع $ا د$ و $ح د$ از مثلث $ا ح د$ مساویست با دو ضلع $ا و$ و $ح د$ از مثلث $ا ح و$ زاویه $ا ح د$ اعظم است از $ا ح و$ پس ضلع $ا م$ از طول باشد از ضلع $ا د$ یعنی $ا م > د$ و بالعکس اگر وتر $ا$ از طول باشد از $و ن$ قوس $ا م د$ بزرگتر از $و ن$ زیرا که اگر بگوئیم مساوی باشد آنوقت وتر $ا$ مساوی میشود با $و ن$ و این خلاف فرض است و اگر بگوئیم کوچکتر است وتر $ا$ کوچکتر میشود شرح - قس مفروضه را کوچکتر از نصف محیط گرفتیم پس اگر اعظم باشد حکم برخلاف مذکور است

قضیه ششم

نصف قطر $ح د$ عمود بر وتر $ا ب$ منصف آنوتر است و قوس موتر $ا د$ هر دو



بونها دو شعاع $ح ا$ و $ح ب$ را وصل میکنیم و هر دو نسبت بمود $ح د$ دو مایل متساویند پس $ا د$ و $ب د$ مساوی البعد اند از موقع عمود یعنی $ا د = ب د$

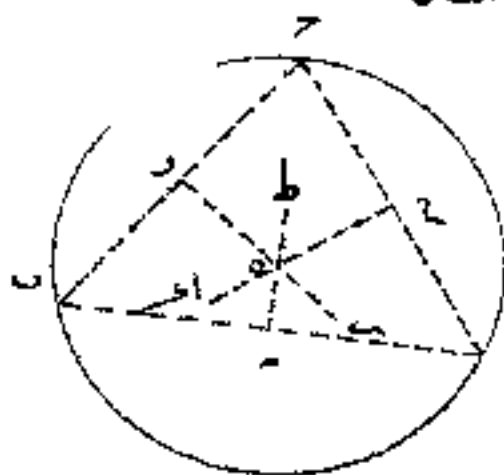
فاینجا چون $a = b$ و c عمود بیستد دارد بروسط ab پس و بر او هر نقطه
از این عمود متساوی البعد است از طرفین a و b و نقطه c یکی از این نقاط است پس
فاصله $ac = bc$ و چون وتر ac مساوی شد با b و bc متساوی میشود
با b و c پس شعاع c عمود بر وتر ab نصف میکند قوس ab و ترابر نقطه c
شعاع - خط c مرور کرده است بر مرکز و بر وسط وتر و بر وسط قوس و عمود است
و تر و چون در تعیین وضع خط و دو شرط از این شروط چهارگانه کافیت پس هر خط که
دارای دو شرط باشد دو شرط دیگر را با تسبیح و اراست

مثلاً عمودی که اخراج شود بر وسط وتر مرور میکند بر مرکز دایره وسط و تقاطع این دو همچنین

قصہ کی مہم

بر سه نقطه او و غیر واقع هر يك استقامت همواره میتوان
مروار داد و پیش از يك دایره ممکن نباشد

برشها و نقاط و ف و را وصل کنید
و بر وسط آنها دو عمود عمود و د را بجا
کنید و اول کوئیم این دو خط بر نقطه مستقامی شوند
زیرا که اگر ستوازی نبودند دو خط با و ج
که از نقطه ف عمود شده اند بر آن دو خط ستوازی



می‌بایست بر یک استقامت باشند و نباید خلاف فرض است

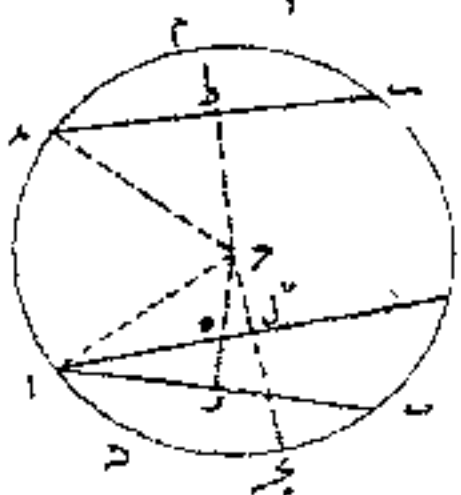
پس نقطه ثانی ه از آن دو محمود چون متعلق است بمحمود ه ط مساوی السجد
از دو نقطه او و ه همان نقطه چون متعلق است بمحمود و ط مساوی البعد باشد
از دو نقطه ه و ج پس کسر فاصله ه ا و ه و ج مساوی شد و بنا بر

دایره که از مرکز و نصف قطر و رسم شود و در خواهد نمود بر هر سه نقطه ا و ب و ج
حال گوئیم ممکن نیست دایره دیگر بر همان سه نقطه فقط گذر کند زیرا که اگر چنین دایره موجود
بود مرکزش بیایدست اقع باشد بر دو خط ط و د و این دو خط بر یک نقطه
مقاطع نباشند

بنابراین عمود وار و بر وسط ا ح مرور نماید بر نقطه ه چونکه این نقطه مساوی البعد
از طرفین ا و ح پس سه عمود وار و بر ا و ساط اضلاع مثلث بر نقطه متفق ط شوند
۲- دو دایره اگر بر زیاده از دو نقطه مشارک باشند منطبق خواهند شد

قضیه هشتم

دو دایره متساوی الطول مساوی البعد باشند از مرکز دایره و از
دو دایره مختلفا نکه اضر باشد بعدش از مرکز بیکتر است

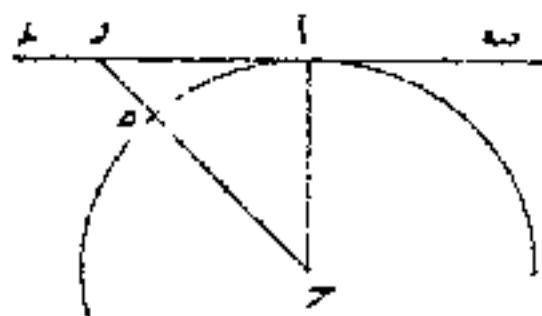


اول فرض میکنیم وتر ا ب = ح ج و بر دو عمود
ح و ح ط آنها را نصف میکنیم و دو شعاع
ح ا و ح ج را وصل میکنیم
پس دو مثلث قائم الزویه ح ا و ح ج
چون وتر ح ا = ح ج و ضلع از نصف ا ب

= ح ط نصف ح ج این دو مثلث متساوی هستند و ا ب و ح ج ضلع سوم در مساوی
میشود با ح ط پس معلوم شد که دو وتر متساوی ا ب و ح ج مساوی البعد از مرکز
ثانیاً چون وتر ا ح اطول است از ح ج و قوس ا ب عظمی است از قوس ح ج
و از قوس ا ب قوس ا ح را مساوی ح ج جدا میکنیم و وتر ا ب را
وصل میکنیم و عمود ح د را بر آن تر فرود بیاوریم و عمود ح د را بر ا ح حال

ظاهر است که دو اعظم باشد از ده و آن اعظم از دل پس بطریق اولی در دل
ولی در د ح چونکه دور تر است و ع ه متساوی باشد پس د ط و دل
یعنی که از دور تر مختلف الطول آنکه اقصر است بعد باشد از مرکز دایره
قضیه ششم

عمود ب د معلوم بر طرف شعاع د ا مماس شود بر دایره
برها هر مائی مثل د و ا طول است از عمود د ا

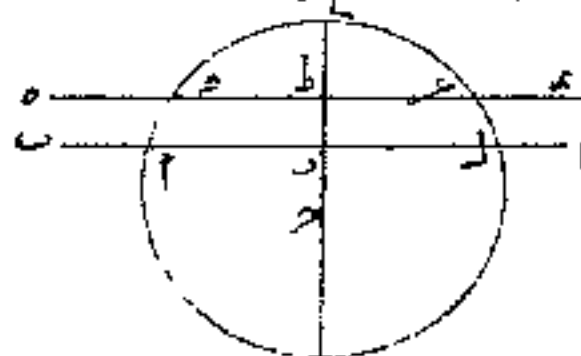


پس نقطه د خارج دایره افتد و از این قطر خط
د ه بیش از نقطه ا با دایره اشتراک ندارد
پس مماس دایره است و بالعکس گوئیم

شعاع د ا وصل بر نقطه مماس عمود باشد بر خط مماس د ه

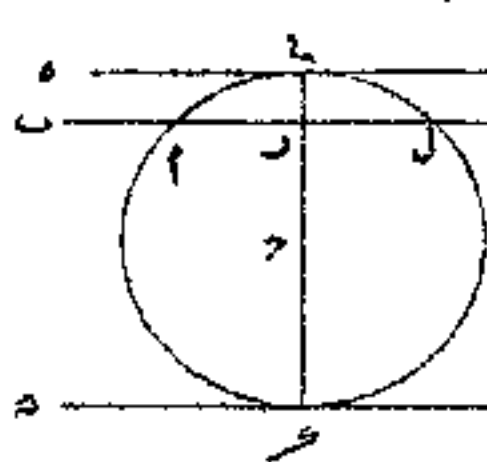
زیرا که جمیع نقاط این خط غیر از نقطه ا خارج دایره است و بنا بر این شعاع د ا اقصر
که میتوان از نقطه د بر خط ب د وصل نمود پس عمود است بر خط
نتیجه - بر نقطه ا مفروضه محیط نمیتوان پیش از یک خط مماس نمود
قضیه ششم

دو متوازی اب و ده از محیط دایره دو قوس متساوی م ن و ل ن جدا
از شکل به حالت وارد اول آنکه دو متوازی قاطع دایره باشند پس شعاع ح د را



عمود کنیم بر وتر م ل و آن عمود شود نیز بر
موازیش ن ل پس نقطه ه بهم بر وسط قوس
م ن واقع باشد و بهم بر وسط قوس ن
ه ل و یعنی م ن = ن ه و قوس

ن = ل پس م = ل - ن = ل - ل یعنی م = ن = ل

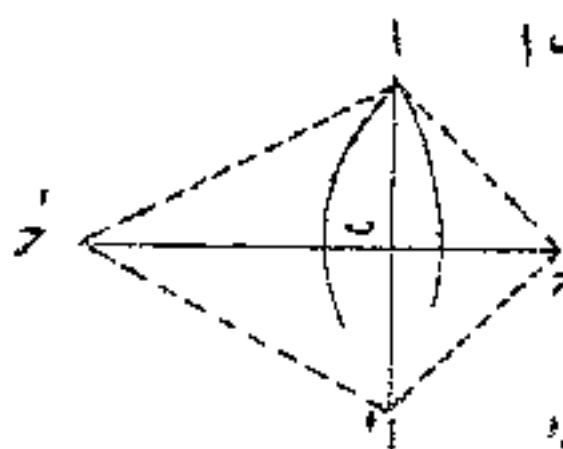


دوم آنکه از دو متوازی اب و ده یکی
قاطع باشد و دیگر مماس شعاع د را
بر نقطه تماس ل وصل میکنیم و آن عبور شود
بر مماس ده و ف نیز بر موازیش م ل
پس نقطه ل واقع باشد بر وسط قوس م

ل یعنی دو قوس م ل و ل واقع با بین دو متوازی مساوی باشند
سیم آنکه دو متوازی مماس دایره باشند یکی ده بر نقطه ل و دیگر ط ن بر نقطه
ل پس خط قاطبی موازات آنها رسم کنیم مثل اب آنوقت بنا بر آنچه ذکر شده م ل
= ل و م ل = ل پس تمام قوس م ل = ل ل و باید مطلق بود که
هر کدام نصف محیط است

قضیه نهم

هرگاه دو دایره مشارک باشند در نقطه ا واقع در خارج خط
ح واصل ما بین مرکزین آنها پس مشارک میشوند در نقطه دیگر
ا واقع بر عمود اب که وارد شده باشد بر ح و فاصله این نقطه دوم
از خط المکونین برابر باشد با فاصله نقطه اول



برشما - اب را مساوی اب بجای کنیم
پس دو یل ح ا و ا چون مساوی البعدانه
از وقع عمود ح د مساوی باشند پس
مرسومه از مرکز د و شعاع ح ا مرور کنند بر نقطه ا

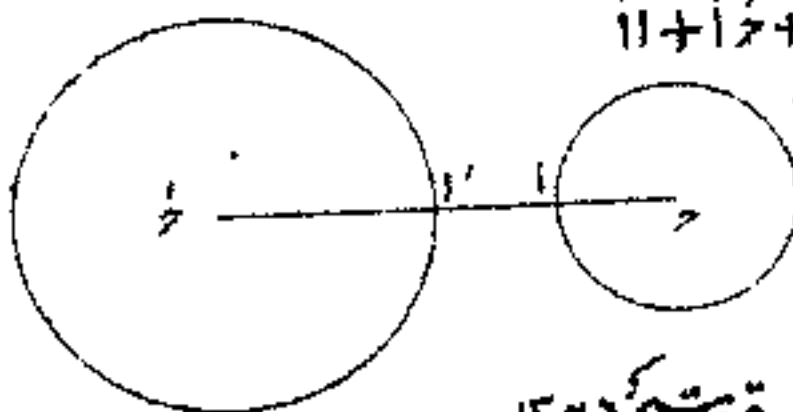
و همچنین دایره مرسومه از مرکز و بیضی و دایره و مرکز را
نتیجه ۱ - دو دایره چون متقاطع شوند خط وصل بین مرکزین عمود باشد بر وسط
نتیجه ۲ - دو دایره چون تماس یکدیگر شوند نقطه تماس واقع شود بر خط مرکزین و الا
اینکه دو دایره در نقطه دیگر مشارک باشند و در این صورت متقاطع میشدند تماس
و دو دایره را چون نسبت هم دیگر بنحیم صاحب پنج وضع مختلف توانست بود متخارج
متداخل تماس داخل تماس خارج متقاطع

قضیہ دفا نریہ

که در دایره هفتخانه بعد از مرکزین اعظم است و مجموع دوشعاع

زیر کہ چون $h = a + b + c$

پس $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

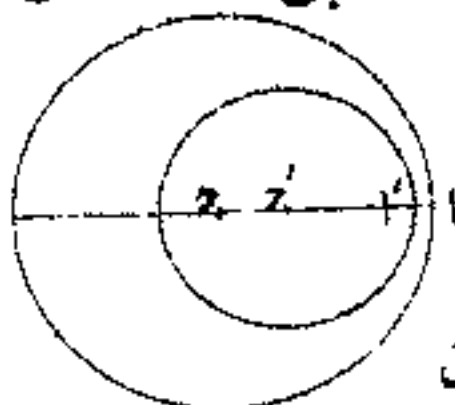


قصیدہ کو پڑھا

دُرِّ دایره متداخلی بعد از ترکیب اصفراست از مجموع دروس شایع

ذہریا کہ چون $\text{ح} \dot{\text{و}} = \text{ح} - \text{وا} - \text{ا ا}$ ایس

$$12 - 12 > 22$$



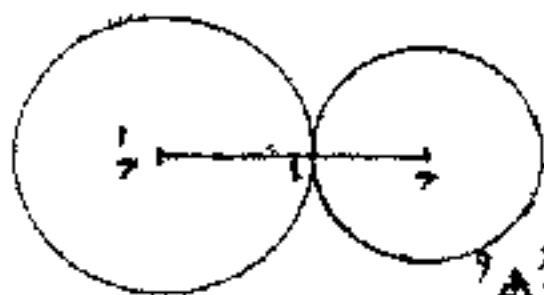
فَضْلُكَ خَيْرٌ مِنْهُ

درد و دایره که متناس جانجی با شند که بر هدی عبدالمکرزین مٹا و بیت
مجموع دوستعاج

زیرا که چون نقطه تماس واقع است

بر خط المکرزین

$$\text{پس } ۱۰۰ = ۱۰۰ + ۱۰۰$$



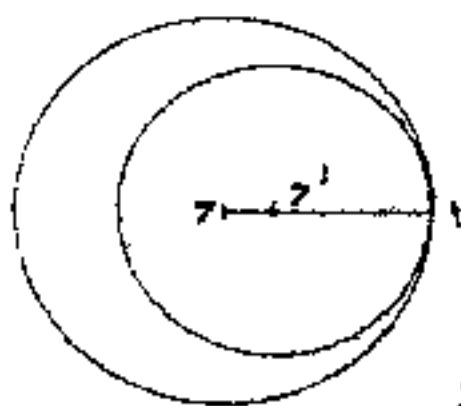
قضیه شانزدهم

دو دایره که تماس داخلی باشند بر همدیگر بعد المکرزین مساویت بنفصل

دو شعاع

زیرا که چون نقطه تماس واقع است بر خط المکرزین

$$\text{پس } ۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$$



قضیه شانزدهم

دو دایره متقاطعه بعد المکرزین با صغراست از مجموع دو شعاع و اعظم

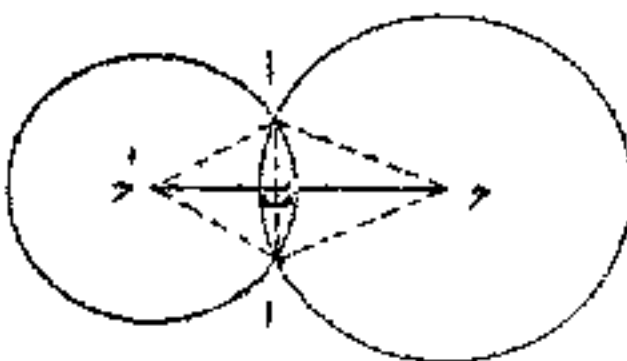
از تفاضل آنها

بر آنها دو مرکز را وصل میکنیم

فصل مشترک آنها مثلثی ترکیب شود

که اضلاعش یکی خط المکرزین و دیگری

و دیگر دو شعاع و او را و نا



برهن شده که در مثلث برضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها

عکس پنج شکل مذکور نیز صحیح است و بهمانوجه برهن شود مثلاً اگر بعد المکرزین قصر

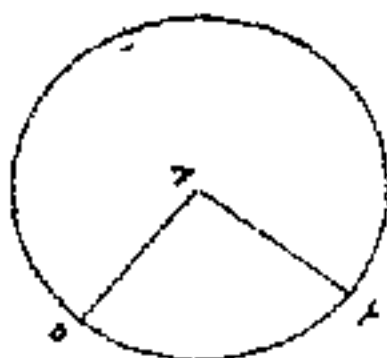
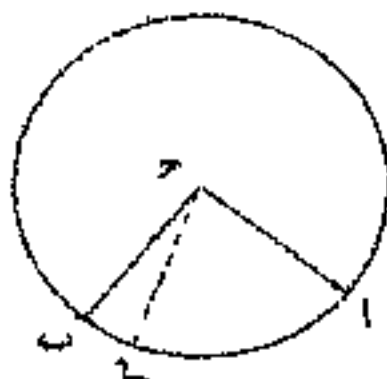
باشد از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها دو دایره متقاطع شوند زیرا که اگر

متخارج یا متداخل بودند بعد المکرزین اعظم میشد از مجموع آنها یا اصغر از تفاضل آنها

و اگر همسایه یکدیگر باشند بعد از مرکز مساوی می‌شوند و شعاع یا به فاصله آنها

قضیه ششم

در یک دایره یا دایره متساویه هرگاه دو زاویه مرکزی $ا ح ب$ و $د ح ه$ متساوی باشند دو قوس $ا ب$ و $د ه$ مقابل با آنها متساوی هستند و بالعکس اگر دو قوس $ا ب$ و $د ه$ متساوی باشند دو زاویه مرکزی $ا ح ب$ و $د ح ه$ متساوی میشوند



پس آنها اولاً اگر دو زاویه متساوی باشند یکی برابر دیگری و از بسیم درست منطبق شوند و چون اضلاعشان مساویست نقطه ا واقع شود بر $د$ و نقطه $ب$ بر $ه$ و آنوقت قوس $ا ب$ باید واقع شود بر $د ه$ و آن نقاطی پیدا می‌شوند مختلفه بعد از مرکز پس $ا ب = د ه$

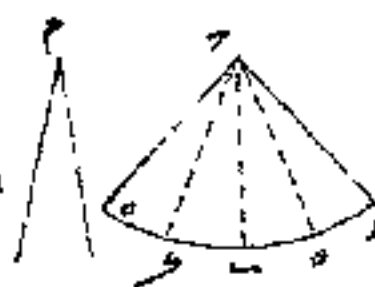
ثانیاً اگر قوس $ا ب$ مساوی باشد با $د ه$

دو زاویه مقابل متساوی می‌شوند زیرا که اگر چنین نباشد مثلاً $ا ح ب$ اعظم باشد از $د ح ه$ احد را مساوی $د ح ه$ جدا می‌کنیم آنوقت قوس $ا ب = د ه$ و بقدر $ا ب = د ه$ پس $ا ب = د ه$ یعنی جزء مساویست با کل و این خلاف است پس $ا ح ب = د ح ه$

قضیه هفتم

در یک دایره یا دایره متساویه نسبت مابین دو زاویه مرکزی مثل نسبت دو قوس واقع مابین اضلاع آنها است

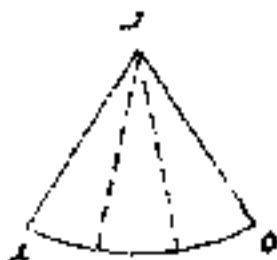
دو زاویه مرکزی و دایره متساویه $ا ح ب$ است $د ح ه$ و اول فرض می‌کنیم که دو



ا ب و ده مقیاس مشترکی
داشتند باشد و آن ۲ مرتبه در
ا ب بچند و ۴ مرتبه در ده
و از این قرار نسبت ا ب به ده

این باشد $\frac{۲}{۴}$

حال نقاط تقسیم دو قوس را بدو مرکز وصل میکنیم آنوقت زاویه ا ح ب بر هفت جزء
متساوی قسمت شود و چون کسین مقابل آنها مساوی هستند و زاویه ح د ه چهار از این جزء
را شامل است پس نسبت آن دو زاویه مثل ۲ است به ۴



و اگر دو قوس ا ب و ده متباین
باشند قوس ده را بر سه جزوه
مشا قسمت میکنیم و فرض میکنیم

ا ب چهار از این جزء را شامل شود و قوس ک د کو چکتر از یک جزء باقی ماند و نسبت
نسبت ا ب به ده عظم باشد از $\frac{۴}{۱۰}$ و اصغر از $\frac{۳}{۱۰}$

و چون دو مرکز را بنقاط تقسیم وصل کنیم زاویه ده بر سه جزء و مساوی قسمت شود
و زاویه ا ح ب چهار از این جزء را شامل شود و باقی میماند کسر ک د کو چکتر از یک جزء
پس نسبت آن دو زاویه نیز واقع باشد باین $\frac{۴}{۱۰}$ و $\frac{۳}{۱۰}$ پس نسبت ا ح ب
ده و ا ب ده هر کدام ۴ مرتبه شامل شدند کسر $\frac{۳}{۱۰}$ را و باین وجه ثابت
میکنیم که هر دو یک مرتبه شامل شوند $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۲}{۱۰}$ و $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۱۰}$ و $\frac{۵}{۱۰}$ و $\frac{۶}{۱۰}$ و $\frac{۷}{۱۰}$ و $\frac{۸}{۱۰}$ و $\frac{۹}{۱۰}$ را و بطور کلی جزو نامی
از واحد را که هر قدر بخواهیم کوچک باشد پس آن دو نسبت مساوی باشند

در تقدیر زوایا و مقیاس آنها

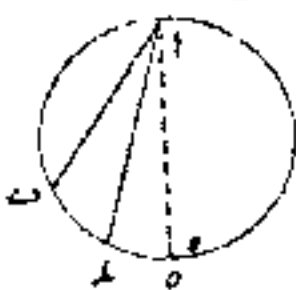
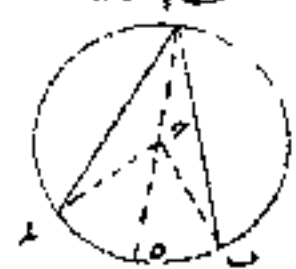
تقدیر نمودن هر شیئی عبارت از اینست که معلوم کنیم نسبت اینشی را با واحد نوع خود
و از همین نسبت در تقدیر نمودن زاویه عبارت است از اینکه بگوئیم آن زاویه قائمه که واحد
فرض شد و نسبتش را معلوم کنیم

و بنا بر شکل مذکور عوض آنکه نسبت باین دو زاویه مرکزی بدست آوریم مستوی
معلوم کرد نسبت دو قوس واقع باین اضلاع آنها را مثلاً عوض آنکه زاویه را بگوئیم
بگوئیم قوس مقابلش را بر یک محیط نسبت کنیم و از اینجا است که بطریق احق را گوئیم
اندازه و مقیاس زاویه مرکزی قوس مقابل است

و من باب سیمین مقایسه محیط دایره را بر ۳۶۰ جزو مساوی قسمت کنیم و هر
کدام را درجه گوئیم و درجه را بر ۶۰ دقیقه و آنرا بر ۶۰ ثانیه و هكذا
پس اگر قوس واقع باین ضلعین زاویه مرکزی ۲۴ درجه باشد مقیاس زاویه چنین
 $\frac{۲۴}{۳۶۰}$ یا $\frac{۱}{۱۵}$

شرح - چون دایره را در قطاع تکرار کنیم ثابت میشود که در دو دایره مقایسه
نسبت دو قطاع به یکدیگر مثل نسبت باین دو قوس مقابل با آنهاست
قضیه فوثر که همد

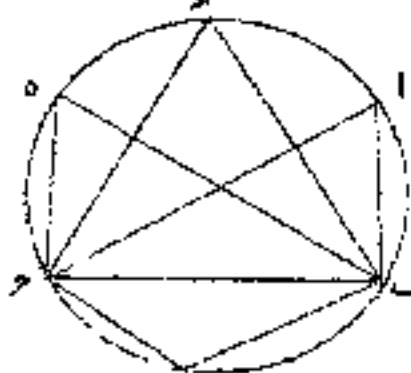
مقیاس زاویه محیطه با نصف قوس باشد واقع باین ضلعین است



فرضاً اول فرض میکنیم که مرکز دایره در زاویه
مفروضه واقع شود و قطره را وصل میکنیم با دو ضلع
ح و ح و آنوقت زاویه ح و ح خارج
مثلاً ا ح و مساوی شود با مجموع دو زاویه ح و ح
ح ا و ا ح و ح و مثلاً ح و ح مساوی

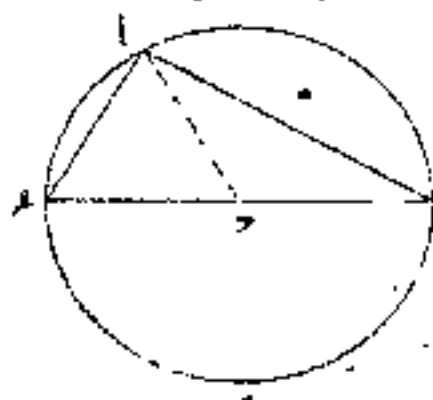
التافیل است و زاویه $\angle A = \angle B$ پس زاویه $\angle C$ مضاعف زاویه $\angle A$ باشد و مقیاس زاویه مرکزی $\angle C$ قوس $\widehat{AB}$ باشد پس مقیاس زاویه $\angle A$ نصف قوس $\widehat{AB}$ باشد و بهمان دلیل مقیاس $\angle A$ نصف قوس $\widehat{BC}$ باشد پس مقیاس $\angle A + \angle B + \angle C = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} =$ نصف $\widehat{ABC} =$ نصف $\widehat{ABC}$

و ویم فرض میکنیم که مرکز O واقع شود در خارج زاویه $\angle A$ و قطر AO را وصل میکنیم پس مقیاس زاویه $\angle A$ نصف قوس $\widehat{BC}$ باشد و مقیاس زاویه $\angle B$ نصف $\widehat{AC}$ پس مقیاس $\angle A + \angle B =$ نصف $\widehat{BC} +$ نصف $\widehat{AC} =$ نصف $\widehat{ABC}$ باشد یعنی نصف $\widehat{ABC}$



پس مقیاس هر زاویه محیطیه نصف قوس مقابل اوست
نتیجه که جمیع زوایای $\angle A, \angle B, \angle C$ و غیره
محاطیه در یک قطعه دایره مساوی باشند چنانکه
مقیاس هر کدام نصف قوس $\widehat{BC}$ است

نتیجه که زاویه $\angle A$ محاطیه در نصف دایره قائمه است چنانکه مقیاسش نصف نیم



دایره $\angle A$ است یعنی ربع محیط و چون این
نقطه معتبر است بوجهی مستقل از ابرار من سازیم
پس شعاع AO را وصل کنیم آنوقت مثلث
 $\triangle AOB$ متساوی الساقین باشد و زاویه

$\angle A = \angle B$ و بکدامثلث $\angle C$ زاویه $\angle C = \angle A + \angle B$ پس $\angle A + \angle B + \angle C =$ یعنی

$\angle A + \angle B + \angle C = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} =$ و بکدامثلث $\angle A + \angle B$ مساوی

شد باز زاویه $\angle A$ دلیل است بر آنکه مجموع سه زاویه اش مساوی باشد باز

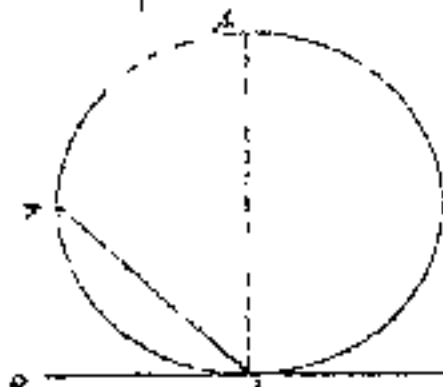
برابر زاویه $\angle A$ و از خارج میدانیم که آن مجموع در قائمه است پس زاویه $\angle A$

یاب قائمه است

پنجم ۴ - هر زاویه مثل $\widehat{BAC}$ (شکل پنجم اول) که مماس باشد بر قطعه بزرگتر از نصف محیط $\widehat{BAC}$ و هست زیرا که مقیاسش نصف قوس $\widehat{BAC}$ و دو باشد و این قوس اصغر است از نصف محیط و هر زاویه مثل $\widehat{BAC}$ که مماس باشد بر قطعه کوچکتر از نصف محیط اصغر است چونکه مقیاسش نصف قوس $\widehat{BAC}$ باشد و این قوس اصغر است از نصف محیط

قضیه ششم

مقیاس زاویه $\widehat{BAC}$ حادثه مابین ظل و وتر نصف قوس $\widehat{BAC}$ واقع مابین دو ضلع آنرا می یابد



برها بر نقطه $\widehat{BAC}$ قطعه را رسم کنید پس زاویه $\widehat{BAC}$ قائم باشد و مقیاسش نصف

محیط $\widehat{BAC}$ است و مقیاس زاویه $\widehat{BAC}$

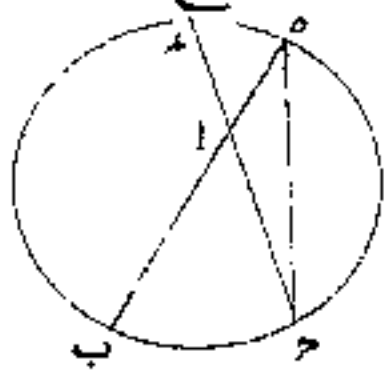
نصف قوس $\widehat{BAC}$ است پس مقیاس $\widehat{BAC}$ یا $\widehat{BAC}$ نصف $\widehat{BAC}$ است

نصف $\widehat{BAC}$ یعنی نصف قوس $\widehat{BAC}$

و بین چه ثابت میکنم که مقیاس زاویه $\widehat{BAC}$ نصف قوس $\widehat{BAC}$ واقع مابین ضلعین آن است

قضیه هفتم

مقیاس زاویه $\widehat{BAC}$ حادثه مابین نقطه فصل مشترک دو قاطع $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BAC}$ که باشند در دایره است مساوی است به



نصف قوس $\widehat{BAC}$ واقع مابین ضلعینش با ضلع

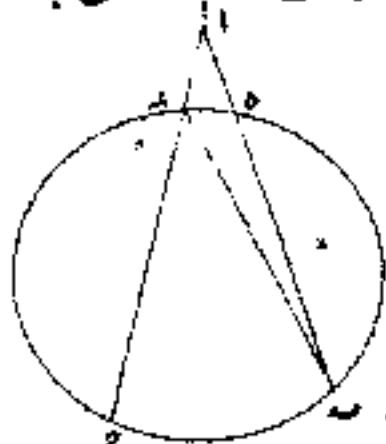
نصف قوس $\widehat{BAC}$ واقع مابین استقامت اند و

برها زاویه $\widehat{BAC}$ خارج مثلث $\widehat{BAC}$

مساحت مجموع دوازده ایه ۶ و ۱۰ و مقیاس این دوازده نصف دویست است و نه است

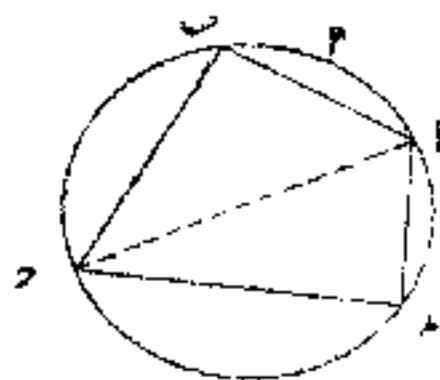
قصہ کریمہ دوم

مقیاس زاویه ب او حاده مابین دو قاطع اب و اح که راست در خارج
 دایره است مساویت با نصف قوس مقعر ب ح نه های نصف قوس متحد
 مررها زاویه مساویت با تفاضل دو زاویه ب و ح



فلجگر - قوس باء (شکل یقیناً اول ۱۹) مکان هندسی رؤس وایاچی است
که مساوی باشد با جری و اضلاعشان مرکبند بر دو نقطه جری و رز که جمیع
رؤیای محاطیه در نقطه جری مساوی هستند با جری و از دو قضیه سابقه مذکور
چنین نتیجه شد که هر زاویه که ضلعینش مرکبند بر جری و رز باشد بر قوس
جری مساوی نیست باز او را جری

قصیدہ مستوفی



و در هر یک از این اجزای مثل ای و د هر دو زاویه
هندسی با یکدیگر تمام میگردانند تا دایره قائمه
زیرا که معیاس مجموع دو زاویه ای و د نصف
محیط ای و د است و این کس که در دو اربعه هندسی

و زاویه مقابل $د$ و $د$ تمام همه یک باشند از شکل قابل محاسب شدن در دایره است
 برهما چون ایره بر سه نقطه $ا$ و $د$ و $د$ مرکز دایره مقیاس زاویه $د$ نصف کوس
 میشود پس مقیاس زاویه $ا$ که تمام $ا$ است نصف کوس $ا$ باشد یعنی از زاویه
 مساویست باز و ایای می طیه در قطعه $ا$ و این مساوی محقق نشود جز آنوقت که نقطه
 واقع باشد بر قوس $ا$ $د$ $ف$ $المطلوب$

مسائل متعلقه بدو مقابل $ا$ و $د$

مسئله اول

میخواهیم خط $ا$ ب را بر دو جزو متساوی کنیم
 از دو مرکز $ا$ و $ب$ و شعاعی طول از نصف $ا$ و $ب$

قوس رسم کنیم تا متقاطع شوند بر نقطه $د$ این نقطه مساوی البعد است از طرفین $ا$ و $ب$
 و همین دو نقطه دیگر را در فوق یا تحت $ا$ و $ب$ است آورید و آن نیز متساوی البعد است
 از همان طرفین و دو نقطه $د$ و $ه$ را بخط $د$ و $ه$ وصل کنید تا خط مفروض را بر نقطه $د$ نصف کند
 برهما دو نقطه $د$ و $ه$ مساوی البعد باشند از طرفین $ا$ و $ب$ پس باید واقع شوند بر عمود
 وارد بر وسط $ا$ و $ب$ و بر دو نقطه پیش از یک خط متوازن برود و $د$ پس $د$ همان عمود است
 و $ا$ و $ب$ را بر $د$ نصف کنند

مسئله دوم

میخواهیم از نقطه $ا$ مفروضه بر خط $ب$ عمود
 بر آن خط اخراج کنیم

دو نقطه $ب$ و $د$ را در طرفین $ا$ یکفصله نشان کنیم
 و از مرکز این دو نقطه و شعاعی طول از $ب$ و $د$ قوس رسم کنیم تا بر نقطه $د$ متقاطع شوند و خط

مقاله دوی

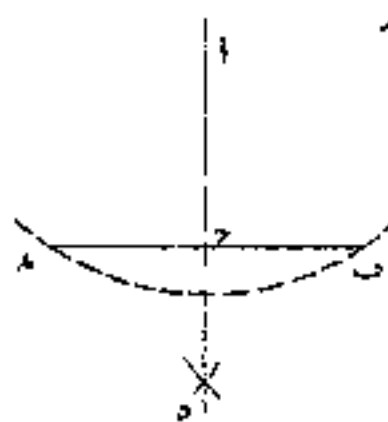
۴۴

ا. را وصل کنید که عمود مطلوب است
بر همان نقطه و چون مساوی البعد است از طرفین ب و د متعلق باشد بهمود و
بر وسط ب و د پس ا. همان عمود است

نتیجه - هرگاه بخواهیم بر نقطه ا. از خط ب و د زاویه قائمه ب. ا. د رسم کنیم باید وجه مذکور را بعینه استعمال

مسئله ششم

میخواهیم از نقطه ا. مفروضه د و خارج خط ب و د عمودی بر آن خط وارد آورد
از مرکز ا. و شعاع مناسبی قوس رسم کنید تا خط ب و د



را بر دو نقطه ب و د قطع کند و بعد بطریق مثل اول

نقطه مثل ه بدست آورید که مساوی البعد باشد از طرفین

ب و د یعنی این دو نقطه را مرکز نموده دو قوس یک شعاع

رسم کنید تا تقاطع شوند بر ه و خط ا. ه را وصل کنید که عمود

تребوست

پس ا. ه دو نقطه ا و ه مساوی البعد اند از طرفین ب و د پس متعلق اند بهمود ا. ه

که بر وسط ب و د خصلج شود

مسئله هفتم

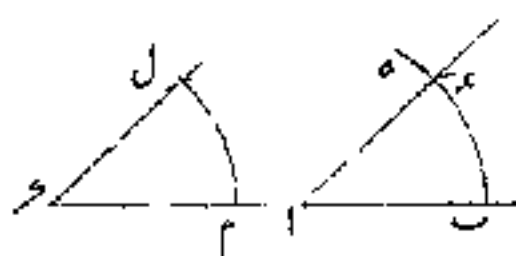
میخواهیم بر نقطه ا. از خط اب زاویه مساوی با زاویه مفروضه ک کنیم

از مرکز ک و شعاع مناسبی قوس م. ل

را رسم کنید و منتهی نمایدش به ضلع زاویه و ا.

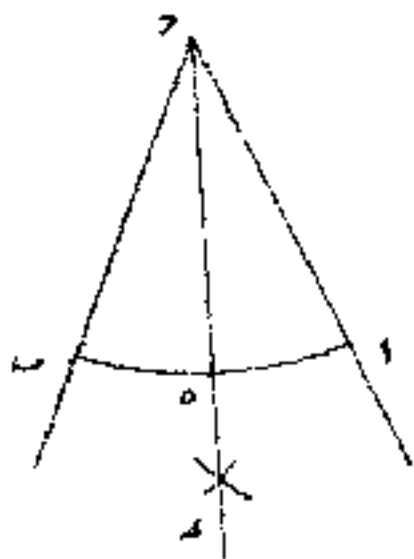
مرکز ا و شعاع ا. ب = ل. م قوس غیر من

ب. ه را رسم کنید و بعد شعاعی برابر وتر



م ل و از مرکز ب قوس رسم کنید تا قوس غیر محدود ب ه را بر نقطه ه قطع کند
و خط ا ه را وصل نماید که زاویه ه ا ب مساوی باشد بر زاویه م ف و ض ل ه
پس ه ا دو قوس ب ه و م ل چون از دو دایره متساوی باشد و صاحب دو وترت و بی
متساوی باشند و زاویه ب ا ه = م ل ل

مسئله پنجم



میخواهیم زاویه مفروضه یا قوسی مفروضه را
برد و جزو متساوی قسمت کنیم
اولا اگر نخواهیم قوس ا ب را نصف کنیم از دو
مرکز ا و ب و شعاعی مناسب دو قوس رسم میکنیم تا
بر نقطه ه تقاطع شوند و خط ه م را وصل کنیم
و آن قوس ا ب را نصف کند بر نقطه ه

پس هر کدام از دو نقطه ح و د متساوی البعد اند از طرفین ا و ب از و تراویه
پس خط ح د عمود باشد بر وسط این وتر پس نصف کند قوس ا ب را بر نقطه ه و خط
تا بیا اگر نخواهیم زاویه ا ه ب را نصف کنیم اول از مرکز ح و قوس ا ب را رسم
کنیم و بعد عمل مذکور را جاری کنیم
مشغول میتوان بود بر این عمل هر یک از دو نصف ا ه و ه ب را نصف نمود و بنا بر
میتوان تقسیمات متوالیه زاویه یا قوسی را ربع نمود و بعد شش و نصف شش و غیره

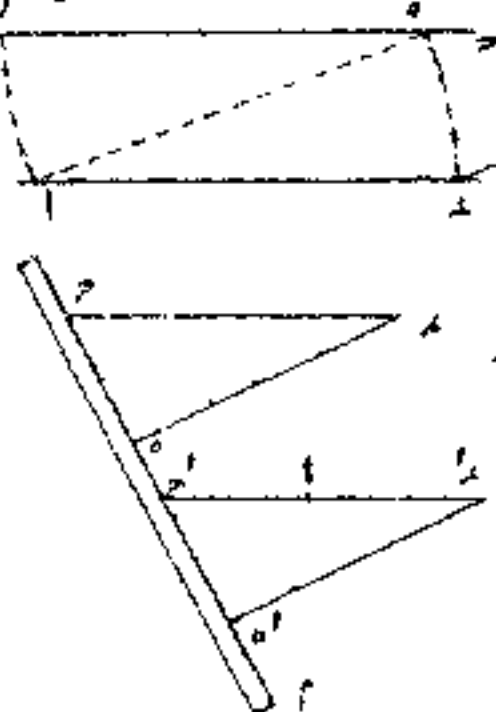
مسئله ششم

میخواهیم بر نقطه انجمنی موازات ب م رسم کنیم
از مرکز ا و شعاعی مناسب قوس ه م را رسم کنید و از مرکز ه و بایمان شعاع قوس

مقاله دوم

۵۶

از زاویه e را مساوی از جدا کنید و از a وصل نماید که موازی مطلوب است
بنها چون a را وصل کنید دو زاویه قباله داخله a و e را مساوی میشود
پس دو خط a و e در موازی باشند و a و e

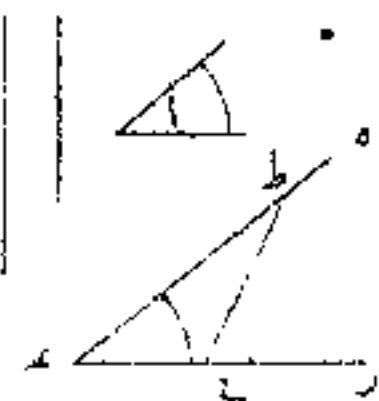


این مسئله را بیشتر تا آنکه مینمایم و آن مثلث
قائم الزاویه است و e پس قریبتر از a و e
بر خط e که میخواهیم موازی آن بر نقطه a خطی میرو
و همسواره ثابتی مثل e را بر قاعده e
آن تکیه و همسواره را در خط e ستاره بفرانیم تا
در ترشش بر نقطه a که در خط e را رسم کنیم و آن

موازی باشد با e چونکه دو زاویه مقابل به e و a مساوی میشوند

مسئله ششم

از مثلثی دو ضلع b و c و زاویه بین آنها a را رسم کنیم و زاویه a را رسم کنیم
خط e را بر نقطه a رسم کنیم و زاویه e در



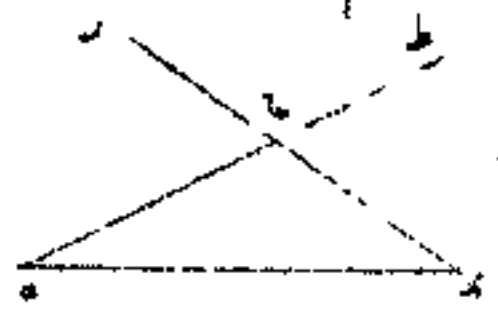
را مساوی از a ترسیم و همسوار e را موازی
ب جدا کنید و e را مساوی e و a
را وصل کنید و e و a مثلث مطلوب است

مسئله هفتم

یک ضلع و دو زاویه مثلثی معلوم است میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم
و دو زاویه مفروضه هر دو مجاوره اند و ضلع معلوم و یا یکی مجاوره است و دیگری مقابل
اگر چنین باشد زاویه a را به صورتی که a معلوم کنیم و آنوقت دو زاویه مجاوره در

مسئله ششم

دست است پس خط $د ه$ را مساوی ضلع معلوم رسم کنیم
و بر نقطه $د$ رسم کنیم زاویه



$د ه$ در را مساوی یکی از اندوز زاویه مجاوره و بر نقطه

$ه$ زاویه $د ه ب$ را مساوی زاویه دیگر رسم و ضلع

$د و$ بر نقطه $ط$ متقاطع شوند و $د ه$ مثلث مطلوب است

مسئله هفتم

سه ضلع $ا ب$ و $ح$ از مثلث معلومست میخواهیم مثلثی را رسم کنیم



$د ه$ را مساوی ضلع $ا$ رسم میکنیم و از مرکز $د$

بشعاعی مساوی ضلع $د و$ ب قوس میزنیم

و از مرکز $ه$ و بشعاعی مساوی $ح$ قوس دیگر این

دو قوس بر نقطه $و$ متقاطع شوند و دو خط $د و$

$د و$ را وصل میکنیم و $د ه$ مثلث مطلوب است

نتیجه شرط امکان عمل آنست که دو قوس همسوم از دو مرکز $ه$ و $د$ بر نقطه متقاطع شود

پس باید ضلع $د ه$ اقصر باشد از مجموع دو ضلع دیگر و اهل از تفاضل آنها و $ا ب$

مسئله هشتم

دو ضلع $ا ب$ و $ب$ و زاویه $ح$ مقابل ضلع $ب$ از مثلث معلومست میخواهیم



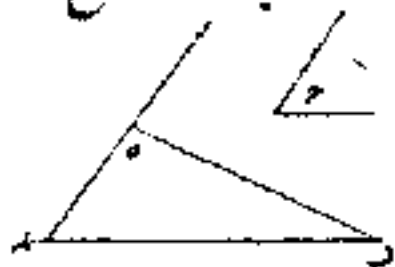
آن مثلث را رسم کنیم

این مسئله دو حالت دارد اول آنکه زاویه $ح$

قائم یا منفرجه باشد پس زاویه $د ه ب$ را مساوی

$ح$ رسم میکنیم و $د ه$ را مساوی $ا ب$ جدا

میکنیم و از مرکز ه و شعاعی مساوی ب قوشی رسم میکنیم تا خط مد را بر نقطه د قطع کند

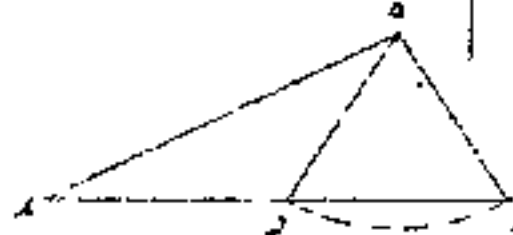


و در ا وصل میکنیم مد و مثلث مطلوب میشود

در حالت مذکور باید ضلع ب اطول باشد از آنچه

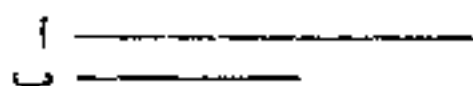
زاویه قائمه بمنفرجه و اعظم است از سایر زوایای

مثلث و ب ضلع مقابلش باید اطول باشد

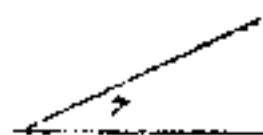


حالت دوم آنست که زاویه ح حاده باشد پس اگر

ضلع ب اطول باشد از ا عمل مذکور را بهمانی میکنیم



مد و مثلث مطلوب میشود



ولی اگر زاویه ح حاده باشد و ضلع ب اقصر از ا

قوشی هر سویم از مرکز ه و شعاع ه د را ب خط

کند ضلع مد را بر دو نقطه د و ط که هر دو در یک سمت د واقع شده اند پس حادث

شود دو مثلث مد و و ط که هر دو در مسئله صد و گشتند

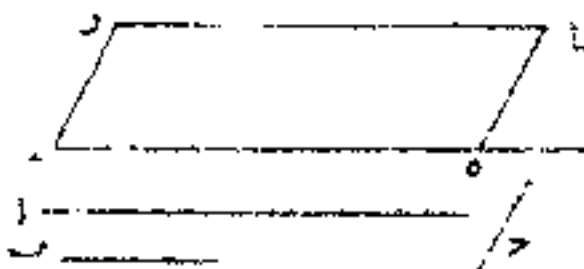
مشکوک ضلع ب اگر اقصر باشد از ا عمل مذکور را بهمانی میکنیم و بر مد و فرود آید مسئله در هیچ حالت

جواب ندارد

مسئله دوازدهم

در متوازی الاضلاعی د و ضلع بجا و ا و ب و زاویه بینهما مساویست و میخواهم

الشکل را رسم کنم



خط مد را مساوی ا رسم میکنیم و بر نقطه د

زاویه د مد را مساوی د و خط مد را

مساوی ب جدا میکنیم و دو قوشی رسم میکنیم

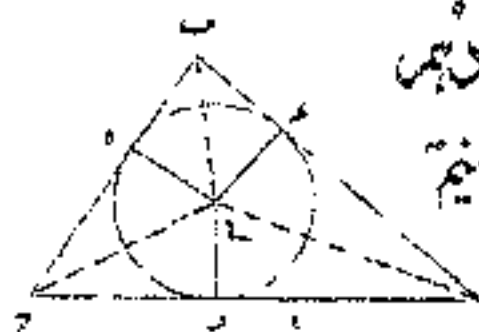
میکنیم بر آن و آن مماس مطلوب است و ۹ و ۲

و اگر نقطه a خارج دایره باشد باین آن نقطه و مرکز دایره را بخط da وصل میکنیم و آن
بر نقطه e نصف میکنیم و از مرکز e و بشعاع ea دایره رسم میکنیم تا محیط مفروض را
بر نقطه b قطع کند و خط ab را وصل میکنیم که مماس مطلوب است

برها چون ab را وصل کنیم زاویه bae محیطی در نصف دایره قائم باشد
و ثانیاً و بنا بر این ab عمود باشد بر طرف شعاع ae یعنی مماس دایره باشد
شرح - نقطه a چون در خارج دایره واقع است از آنجا دو مماس ab و ac می توان برد
رسم نمود یکی ab است و دیگری ac زیرا که در دو مثلث قائم الزاویه bae و cae
چون وتر a مشترک است و ضلع ae مشترک است پس این دو مثلث متساوی باشند و ۹ و ۱۰
پس $ab = ac$ و نیز زاویه $bae = cae$ و $ab = ac$

مسئله نهم

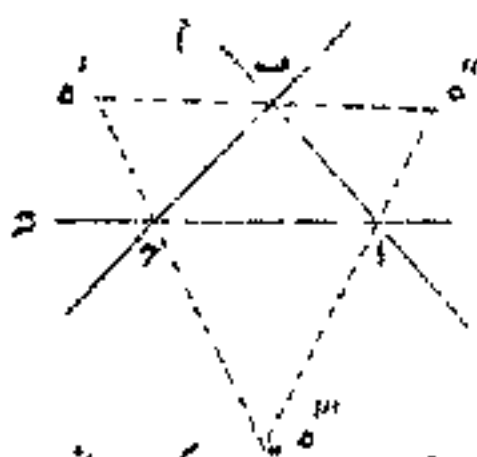
میخواهیم در مثلث abc دایره محیطی بکشیم



بر دو زاویه a و b دو خط منصف الزاویه
 ae و be را رسم و در هید این دو خط متقاطع

شوند بر نقطه e و این نقطه متساوی البعد باشد از سه ضلع ab و ac و bc پس
اگر از آن نقطه سه عمود ed و ef و eg را بر ضلع bc و ac و ab شست فردا و رسم متساوی شوند
و دایره که از این نقطه و بشعاع ed رسم شود مماس باشد بر سه ضلع

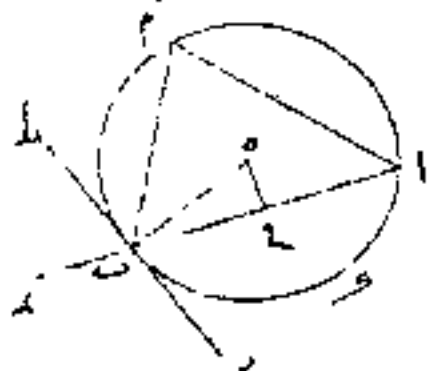
بنابراین نقطه e یک فاصله است از دو ضلع ab و ac و متعلق باشد به خط
منصف الزاویه a پس سه خط منصف الزاویه ایی مثلث بر نقطه متقاطع شوند
بنابراین چون دو زاویه خارجی m و n و o را بدو خط منصف کنیم



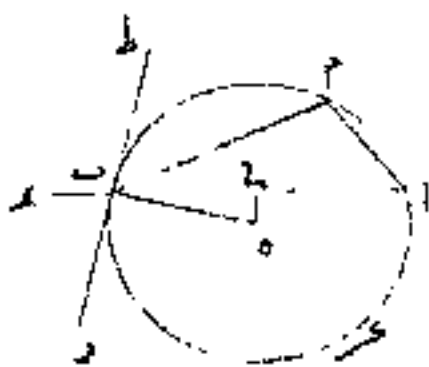
این دو خط بر ه متقاطع شوند و این نقطه مرکز
دایره است که مماس شود بر ضلع ب ج و
بر استقامت د و ضلع دیگر همچنین نقطه
و ه مرکز دو دایره باشند که مماس شوند
بر یکی از ضلع مثلث و بر استقامت د و

ضلع دیگر پس معلوم میشود که بر سه خط مفروض چهار دایره میتوان مماس نمود
مسئله ششم

میخواهیم بر خط اب قطعه دایره رسم کنیم که قابل احتوائی زاویه مفروضه
باشد یعنی چنان باشد که جمیع زوایای محاطیه اش مساوی باشند یا زیادتر



اب را بستند امتداد میدیم بر نقطه زاویه
ب ط را مساوی د رسم کنیم و ه را عمود کنیم
بر ب ط و ه را عمود بر وسط اب این دو
عمود متقاطع شوند بر ه و از این نقطه شعاع



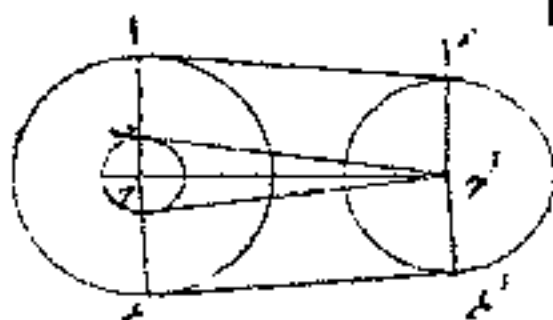
دایره رسم کنیم و قطعه مطلوبه ام ب است
پس چنانچه ب د عمود است بر طرف شعاع
ه ب مماس دایره باشد و مماس زاویه
اب نصف قوس اله ب است و ه د

مماس زاویه محیطیه ام ب بر نصف قوس اله ب است پس زاویه ام ب = ا ه
= ط ب د = چنانچه جمیع زوایای محاطیه در قطعه ام ب مساوی باشند زاویه مفروضه
شریح - اگر زاویه مفروضه قائم بود قطعه مطلوبه نصف دایره میشد هر سومی بر قطر اب

مسئله پنجم

میخواهیم بر دو دایره که خطی مماس مشترک رسم کنیم

اول فرض میکنیم مسئله حل شده باشد و ا



مماس مشترک خارج باشد بر دو دایره و دو

شعاع a و b را بر دو نقطه مماس وصل

میکنیم و خط ab را موازی با a پس دو

شعاع a و b چون عمود اند بر a عمود باشند بر ab پس خط ثانی مماس شود بر

دایره که از مرکز b رسم شود شعاع $b = a - b$ پس از این تفصیل

العمل ذیل استنباط شود

از مرکز b و شعاع مساوی بفصل $a - b$ دایره رسم کنید و از نقطه a خطی برین

دایره مماس کنید و چون نقطه b بدست آید خط ab را رسم کنید و a را موازی

a و خط a را استخراج نمایید که مماس مطلوب است

از دستور العمل مذکور چنین استنباط میشود که مسئله صاحب دو جواب است چنانکه از نقطه

a دو خط مماس میتوان بر دایره مرور داد و شرط امکان مسئله اینست که $a > b$ و

$a - b$ و عبارت از آنست که دو محیط متداخل نباشند و آن جواب ندارد

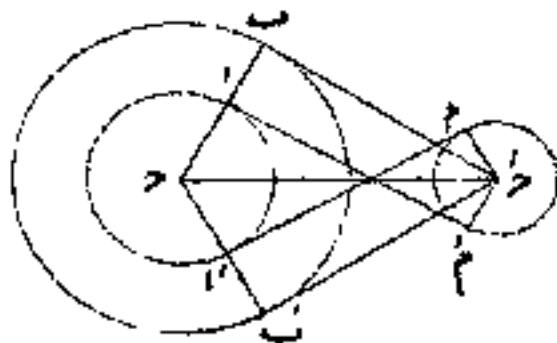
حال میخواهیم خطی مماس مشترک بر دو دایره

رسم کنیم دو شعاع آنها a است و b و

خط a مماس مطلوب باشد پس بر دو

نقطه مماس دو شعاع a و b را

وصل میکنیم و خط ab را موازی



اُم حال چون اُم نمود است برد و شعاع ح او دُم خط ح ب نیز نمود باشد بر
همانند و خط و بنا بر این محاسن شود و بر دایره که از مرکز ح رسم شود و شعاع ح ب = ح
+ اب = ح + دُم

و دستور العمل این شد که از مرکز ح و شعاع مساوی مجموع دو شعاع
و دایره مفروضه و ایره رسم کنیم و از نقطه د خط ح ب را بر آن محاسن کنیم و باقی
عمل را بطریق مذکور جاری نماییم

این سئل نیز صاحب دو جواب است ولی شرط امکنش اینست که ح د < ح + دُم
یعنی متخارج باشد یا محاسن خارج

مسئله چهارم

میخواهیم بزرگتر مقوم علیه مشترک مابین دو خط اب و ح معلوم
کنیم و بعد نسبت عددی آنها را
بزرگتر مقوم علیه مشترک این دو خط
ممكن نیست از خط اقصر ح د متجاوز کند

ولی این خط اگر برات صحیح در خط اطول اب بکشد درین صورت خود بزرگتر مقوم علیه
مشترک مطلوب است پس از ابر اب نقل میکنیم و فرض میکنیم اب = ح د
+ ط ب و میگوئیم بزرگتر مقوم علیه مشترک مابین اب و ح د همیشه بهمانست
که موجود است مابین ح د و خط ح د و ط ب

زیرا که هر مقوم علیه مشترک باشد مابین اب و ح د چون عا د میکند ح د را
عا د کند ط را و چون عا د میکند اب را عا د کند درست باقی ط ب پس
مقوم علیه مشترک باشد مابین اب و ح د

مقاله دهم

۶۴

و از اینقرار جمیع مقوم علیه های مشترک مابین اب و ح د بعینه تا آنجا است که یافت شود
مابین ح د و ط ب پس بزرگتر آنها نیز یکی باشد

حال ط ب را بر ح د نقل میکنیم و فرض میکنیم $ح د = ط ب + ک$ و بطریق مذکور ثابت
میکنیم که بزرگتر مقوم علیه مشترک مابین ح د و ط ب همانست که یافت شود و مابین
و لشد

حال ل د را بر ط ب نقل میکنیم و فرض میکنیم $ط ب = ل د + و$ و خط ل د بزرگتر مقوم
مشترک باشد مابین اب و ح د

و از تساویهای سابقه این دو تساوی نتیجه شود

$$\begin{aligned} ح د &= ط ب + ک \\ اب &= ح د + و \end{aligned}$$

پس نسبت اب به ح د بقدر ک است

تنبیه - در آخر عمل چنین فرض کردیم که سلسله اعمال منتهی شود و باقی صفر و حال معلوم
ثابت کنیم که اگر دو خط صاحب مقیاس مشترک باشند فرض صحیح است و الا اگر اصم باشند
بصفر غیرسیم ولی باقی ماندند و چنانچه عیثوند تا هر حد که بخواسته باشیم
بوی آنها فرض میکنیم ح د دو خط مفروض باشند و ب ب ب ب ب ب... باقی ماندی
متساوی باشند و ب ب ب ب ب ب... خارج قسمتها پس اینجند تساوی حاصل شود

$$\begin{aligned} ح د &= ط ب + ک \\ ح د &= ط ب + و \\ ح د &= ط ب + و \\ ح د &= ط ب + و \end{aligned}$$

باقی ب کوچکتر است از چ زیرا که اگر بیش از یکمرتبه در ب نکند بزرگتر باشد

چ پس آن بی کو چکتر باشد چ و اگر چندین مرتبه در چ بخج حکم مذکور بطریق اولی صحیح باشد
و بهمان دلیل این چند نامساوی حاصل شود

ب > پ و بنا بر این پ > چ

ب > پ و بنا بر این پ > چ

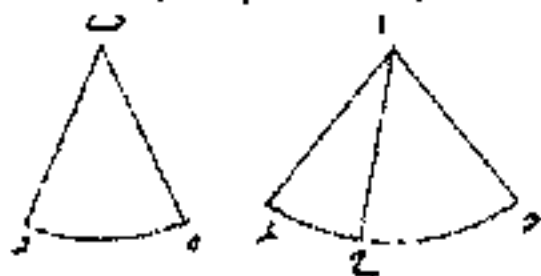
ب > پ و بنا بر این پ > چ

و همچنین در مابقی

پس معلوم شد که اگر رشته عمل را بی اندازه ممتد کنیم باقی مانده افتد کوچک می شود که بخواهیم
و بنا بر این اگر مقسوم علیه مشترک در میان باشد اشیائی مانده صفر خواهیم رسید و الا لازم
که باقی مانده ای پیدا شود که چکتر از مقسوم علیه مشترک و این حکم بنا بر قضیه مذکوره باطل است

مسئله نهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین دو زاویه ا و ب را اکتفا
داشته باشد معلوم کنیم و بعد از آن نسبت عددی آنها را



از دو مرکز ا و ب و یکانه شعاع دو گوش
ح و د و د را رسم کنید و اینها مقیاس
اند و زاویه اند پس بطریق مسئله سابقه

عمل را در دو گوش ح و د و د جاری نمایند زیرا که همانطور که خطی را بر خطی نقل کنیم
میتوان قوسی را نقل نمود بر گوش دیگر که همان شعاع باشد پس اگر این دو گوش مقسوم
علیه مشترک باشد بوجه مذکور بدست آید و بعد نسبت عددی آنها و این نسبت بعینه نسبت این دو
زاویه مفروضه است و اگر مثلا اگر د مقیاس مشترک دو گوش باشد د ا ح مقیاس مشترک دو گوش
و اگر دو گوش مفروضه هم باشد و زاویه نیز چنین است و آنوقت باید نسبت تقریبی آنها بدست آورد

مقاله ششم

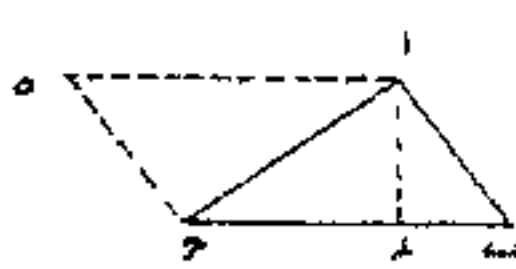
در مقياس و مساحت اشكال ذوات كثره الاضلاع و تشابهاتها
حدود

- ۱- مساحت شكل عبارت است از نسبت وسعت الكل بسعت واحد سطح و در كلام ممكن است دو كل سطح و مساحت بجاى هم بگيرند استعمال شوند
- ۲- دو شكل متعادل باشند كه از حيث مساحت مساوى باشند و شكل ممكن است متعادل باشند با نكته بحسب صورت پنج تشابه نباشند مثل دایره و مربع و همچنين مثلث و مربع مستطیل و امثال آنها
- در دو شكل كلى قساوى مختصراست كه چون يكى ز آنها بر ديگر نقل شود در جميع اجزاى خود برهم منطبق شوند مثل دایره كه صاحب كشاف باشند و دو مثلثى كه اضلاعاى نظير بنظر مساوى باشند و امثال آنها

- ۳- ارتفاع متوازيه الاضلاع عبارت است از عمودى كه اندازده فاصله باين دو ضلع متقابل را حد بين اب و جد باشد
- ۴- ارتفاع مثلث عمودى است كه از راس زاويا اخراج شده باشد بر ضلع مقابل به دكه قائم
- ۵- ارتفاع ذوزنقه عمودى است كه بين دو ضلع متوازيش اب و جد اخراج شده باشد

بقية قبل از رسيدن باین مقاله و مقالات مابعد بايد خواص تناسب را دانست و قبض
آنرا در اصول حساب و اصول جبر و مقابله ذكر نموده ايم و اينجا نظريه نكته و احكام و ترتيب
مابعد را بمى نباشد يعنى تناسب اشاره نمايم تناسب است $a:b = c:d$ و ارجح

مساحت مثلث مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در نصف ارتفاع



برهان مثلثات در نصف متوازی الاضلاع

اب و است که بر همان قاعده و همان

ارتفاع رسم شده و مساحت شکل ثانی متساوی

باب ۷۰ $\times$ ا و ه من مساحت مثلث چنین باشد $\frac{1}{2} \times$ ب $\times$ ا یا ب $\times$ ا $\frac{1}{2} \times$ ا و ه

بنیجه - هر دو مثلث که بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است اگر ارتفاع

واحد باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع است

قضیه ششم

مساحت ذوزنقه اب د مساویست با حاصل ضرب ارتفاع ه د

در نصف مجموع دو قاعده متوازی اب و د

برهان از نقطه ط وسط ضلع د ب خط ل را

بموازات ضلع مقابل ا د رسم میکنیم و در امتداد

میدسیم تا آنرا بر نقطه ک تلاقی کنیم در دو مثلث ط ب ل و ط د ک ضلع ط ب

بعل = ط د و زاویه ب ل ط ب = ط د ک و زاویه ط ب ل = ط د ک چنانکه د ک

موازیست با ب ل و ضلع ب ل و ضلع د ک مساوی باشند و ط ب پس ذوزنقه

اب د مساویست با متوازی الاضلاع ا د ک ل و میفاس شکل ثانی نیست

ه د $\times$ ال و ل ال = ا ل و چون مثلث ط ب ل = ل د ط ضلع ب ل

= ل د پس اب د + ا د = ا ل + ل د = ا ل و بنا بر این ال نصف مجموع

دو قاعده اب و د است و چنانچه بصورت نموده شود اب د + د = ه د $\times$ (اب + د)

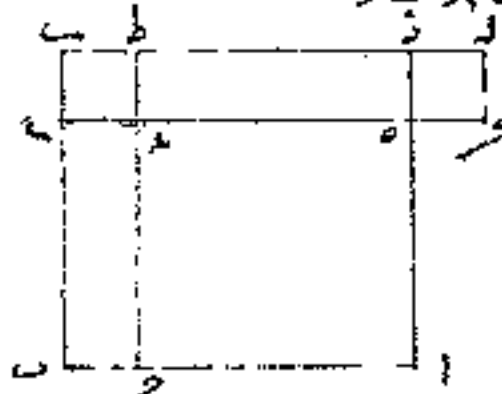
شرح - چون از نقطه ط وسط ب د خط ط ل را بموازات قاعده اب رسم کنیم نقطه

نتیجه شود $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 و چون مقیاس سطح را معلوم فرض کنیم این تساوی دلیل دیگری است بر قضیه مذکور
 و در دو قضیه قبل نیز باید چنین ملاحظه نمود

قضیه پنجم

خط a تفاضل دو خط a و b است پس مربع a مرکب باشد از مربع
 a باضافه مربع b و نهضای مضاعف سطح a و b یعنی چنین

$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab + b^2$$



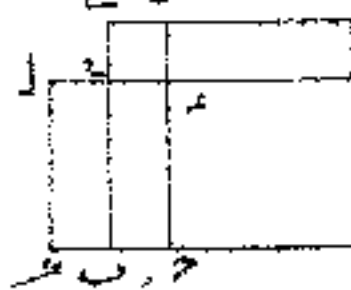
بر کما - مربع a و b را رسم کنید و a را مساوی
 a جدا کنید و b را بموازات b رسم کنید
 و a را بموازات a و مربع b را داخل a تمام
 پس مقیاس و سطح a و b و a و b را اندازه

بر کما ایست a و b و بعد از وضع آنها از تمام شکل a و b را اگر است
 با $a^2 + b^2$ ظاهر است که باقی میماند مربع a و b و a و b و a و b
 حکم مذکور به دستور جدیدی نیز ثابت شود از اینقرار $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

قضیه ششم

سطح مجموع و تفاضل دو خط a و b مساویست با تفاضل دو

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

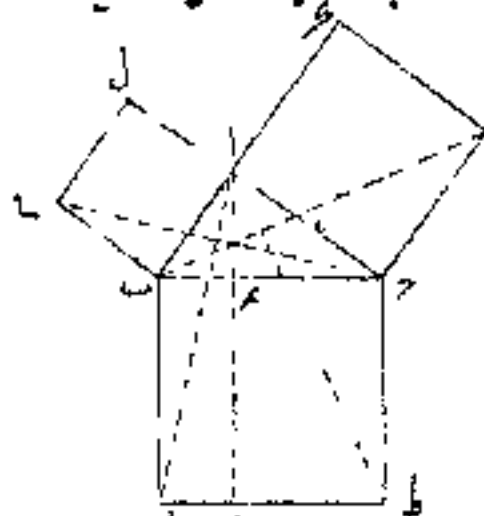


بر کما و مربع a و b را واحد را برابر و
 او رسم کنید و a را امتداد دهید تا قدر که b
 مساوی شود با b و سطح a و b را تمام

پس قاعده اله سطح بقدر مجموع دو خط اب و ب است و ارتفاعش اه بقدر ضلع
 همانند و خط پس سطح ال ل ه $= (اب + ب د) \times (اب - ب د) =$ و این سطح
 مرکب است از دو جنس اب ب د و ب د ل ک و جزء ب د ل ک مساویست با
 سطح ه ط و چونکه ب د $=$ ب د و ب د $=$ ه و پس ال ل ه $=$ اب ب د ه $+$ ه ط و
 و این جسم با مساویست با مربع اب د و مربعهای مربع ب د ط که رسم شده است بر ب د
 پس خلاصه $(اب + ب د) \times (اب - ب د) =$ اب ب د
 شرح این حکم نیز از دستوری است بناط شود با مضمون
 $(ب - د) (ب + د) = ب^2 - د^2$

قضیه نایزدهم

در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساویست با مجموع دو مربع ضلع دیگر
 بر آنها - مثلث اب د قائم الزاویه است بر نقطه ا و بعد از ترسیم اضلاع از زاویه قائمه



ا ب را بر وتر خارج میکنیم و امتدادش میکنیم
 تا نقطه ه و دو قطار ا د و ح را وصل کنیم
 پس زاویه اب د مرکب است از مجموع زاویه اب د
 و زاویه قائمه د ب د و زاویه د ب د
 مرکب است از همان زاویه اب د و زاویه قائمه

اب ب د پس زاویه اب د $=$ ب د و ضلع اب $=$ ب د چون دو ضلع دیگر یکسان
 ب د $=$ ب د پس دو مثلث اب د و ب د ب د $=$ ب د و چون دو ضلع و زاویه بینشان
 مساویست مساوی باشند و مثلث اب د نصف سطح ب د ه باشد (و بنا
 اختصار سطح ب د ه) که بر همان قاعده د و و همان ارتفاع ب د است و

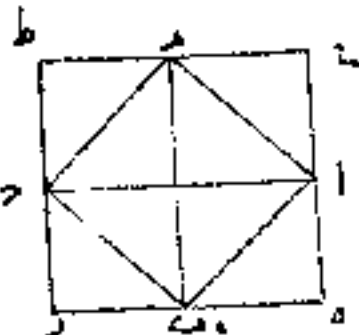
مقاله سیم

۷۶

تاب ط واقع شود بر مساوی خود ب ا و ضلع ب د نظر متساوی دو زاویه ط ب د و ا ب د واقع شود بر ب د و نقطه ح بر ب د و با یکدیگر نظر متساوی دو زاویه ب د ح و ب د ح خط ح د منطبق شود بر مساوی خود ح د

و بهین وجه ثابت میکنیم که شکل ط ب د مساویست با ا ب د
پس چهار ذوزنجه اضلاع متساوی شدند و شکل ط ب د در معادل گشت با ا ب د و حال چون از یک طرف دو مثلث متساوی راه و ا ب د را وضع کنیم و از طرف دیگر دو مثلث ا ب د و ح د را باقی بماند مجموعاً دو مربع ا ب ط و ح د مساوی با مربع ب د ح د

خلع دیگر



باینصورت $ا ب د = ح د ط$

۲ - شکل ا ب د مربعی است و ا د قطر
المربع و مثلث ا ب د قائم الزاویه است
متساوی الساقین پس $ا ب = ح د = ا د + ح د$

$ا ب . ح د = ا د . ح د$ پس نتیجه شد که مربع قطراح مضاعف مربع ضلع ا ب است و چون
 $ا د : ا ب = ۲ : ۱$ بعد از استخراج جذر چنین میشود $ا ب : ا د = ۱ : ۲$ یعنی
شکل مربع قطر و ضلع متباین باشند

۳ - در وجوه اول ثابت شد که مربع ل د معادلت با مستطی ب د ح د و نظر باینکه شکل ا ب د
ب د ح د مربع ب د ط د نسبت به مستطی ب د ح د مثل قاعده ب د ح د است بقاعده ب د
پس $ب د : ح د = ا ب : ح د$

یعنی که مربع و ذوزنجه قائمه نسبت به مربع یکی از دو ضلعش مثل طول و توانست

مجاوره بهما تضلع و قطعه عبارت از آن جزو و تراست که تحدید شده باشد بموضع

از زاویه قائمه و از اینقرار به خطه مجاوره بضلع اب است و مد قطعه مجاوره بضلع

ا ح و از اینقرار به خطه $a^2 = b^2 + c^2$: $a^2 = b^2 + c^2$

عم - دو سطح به مد و ر و مد خطه نیز بر یک رتفا عند و بنا بر این برست دو قاعده

ب مد و ح و چون این دو شکل معادلند بار و مربع ا ح و ا ح پس اب : ا ح =

ب مد : مد یعنی که مربع دو ضلع مجاوره قائم برست دو قطعه و تواند کرد مجا

آن دو ضلع باشند که قیاس مثلث قائم الزاویه نظر باین خواص فرست شکل عرض کنیم

و اصل فرست این خط شکل برای اینست که

ح د - تصویر خط مد بر خط اب

عبارت است از قطعه د واقع باین

و عمود وارده از د و نقطه د و مد بر خط اب

قضیه و اینها

در هر مثلث مربع ضلع مقابل بر زاویه حاده مساویست با مجموع مربعین ضلع

دیگرنهای مضاعف مستطی یکی از امد و ضلع دیگر بقویین ضلع دعیین مربعین ضلع

مثلاً در مثلث اب د زاویه حاده د است و عمود

ا د را بر ب د فرود می آوریم و می گوئیم

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2$$

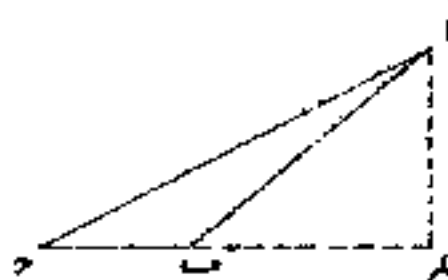
برهان این شکل در حالت اول آنکه عمود د خط مثلث اب د واقع شود پس ب

$b^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2$: $b^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2$ و چون

بر طرفین مساوی ا د اضافه کنیم و ملاحظه نماییم که در دو مثلث قائم الزاویه اب د

و آمد این دو تساوی حاصل است $a^2 = b^2 + c^2$ و $a^2 = c^2 + b^2$

معادله اول چنین شود $a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$ و بنا بر این



حالت دوم هنگامی که عمود از خارج مثلث است

واقع شود پس $b^2 = c^2 - 2cd$ و بنا بر این

معادله دوم چنین شود $a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$ و چون

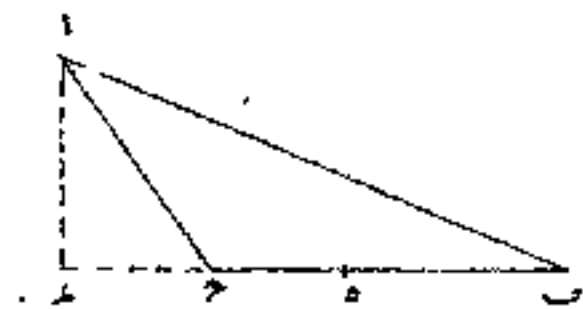
بر طرفین آن بفرایم بطریق سابق چنین میشود $a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$

قضیه سیزدهم

در هر مثلث منفرجه الزاویه وترج ضلع مقابل بناویته منفرجه مساوی مجموع

دو وترج دو ضلع دیگر با ضلع مضاعف سطح یکی از آن دو ضلع در تصویر

دو برابر همین ضلع



مثل ضلع اب مقابل زاویه منفرجه در مثلث

اب و پس از برابر ب عمود کنیم و گوئیم

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$

برهان - عمود مذکور ممکن نیست در داخل مثلث واقع شود زیرا که اگر مشد بر نقطه واقع

میشد بوقت مثلث احمه و از امیثد زاویه قائمه و زاویه منفرجه در او این محال است

پس باید در خارج واقع شود و بنا بر این $b^2 = c^2 + 2cd$ و بعد از آن

$b^2 = c^2 + 2cd$ و چون بر طرفین تساوی آن اضافه کنیم

نصف شکل سابق را در آن نمایم چنین شود $a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$

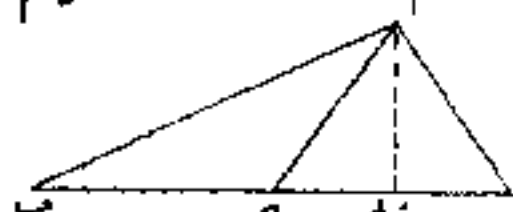
نتیجه - مثلث قائم الزاویه تنها دارای این صفت است که مجموع دو وترج ضلع مساوی

باشد با وترج ضلع سیم زیرا که اگر زاویه واقع باشد بین آن دو ضلع حاد باشد مجموع آن دو وترج

اعظم باشد از مربع ضلع مقابل و اگر منفرد باشند اصغر باشد از مجموع

قضیه چهارم

در مثلث مثل $\triangle ABC$ چون خط AD را از A بر وسط قاعده BC و D میانی BC باشد و AD را تا E که $AD = DE$ و BE را بکشیم



$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$

برای عمود AD را بر قاعده BC در D فرض کرد
آورید آنوقت برابر AD و DE در مثلث ADE این تساوی می شود

$$AD^2 + DE^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$

و در مثلث ABE برابر AD این تساوی

$$AB^2 + BE^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$

و بعد جمع دو تساوی را خطه کنیم $BE = EC$ و $AD = DE$ چنین شود

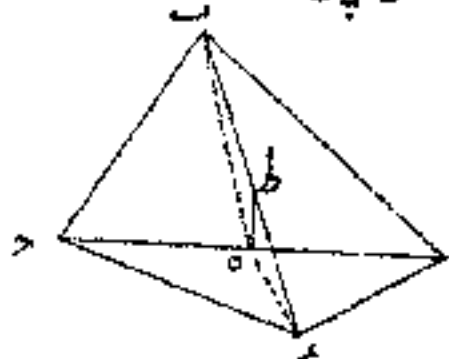
$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$

قضیه پنجم

دو مربع

در هر ذوابعه اضلاع مجموع مربعات چهار ضلعش مساویست با مجموع

دو قطر یا ضافه چهار برابر مربع خط واصل بین منصف دو قطر



برای AD و BE دو قطر ذوابعه اضلاع

AD و BE است و EF دو قطر وسط قطر

و خطوط BE و DE و EF را وصل می کنیم

آنوقت برابر قضیه سابقه در مثلث ABE

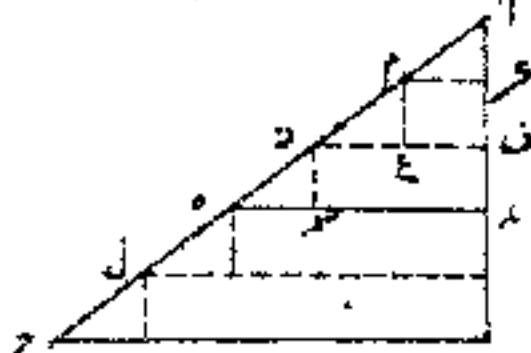
$$AB^2 + BE^2 = 2AE^2 + 2EF^2 \quad \text{و در مثلث } ADE \quad AD^2 + DE^2 = 2AE^2 + 2EF^2$$

و بعد جمع $AB^2 + BE^2 + AD^2 + DE^2 = 4AE^2 + 4EF^2$ و چون

$$\begin{aligned} \text{در مثلث } \triangle ABC \text{ ب } \triangle DEF &= \triangle ABC + \triangle DEF = \triangle ABC + \triangle DEF \\ \text{پس } \triangle ABC + \triangle DEF &= \triangle ABC + \triangle DEF = \triangle ABC + \triangle DEF \\ \text{و چون } \triangle ABC &= \triangle DEF \text{ و } \triangle DEF = \triangle ABC \text{ پس} \\ \triangle ABC + \triangle DEF &= \triangle ABC + \triangle DEF = \triangle ABC + \triangle DEF \end{aligned}$$

پس نتیجه آنکه اگر دو اربعه ضلع متوازی الاضلاع باشند خط ط ه معذور
پس چنین می شود که در هر دو اربعه ضلع مجموع مربعات چهار ضلع مساوی باشد
مجموع دو مربع دو قطر و عکس چنین حکم نیز صحیح است

در کتاب اشکال قضیه شانزدهم و خطوط متناسبه
هر خط که موازی است یکی از اضلاع مثلث رسم شود و وضع دیگرش را
نسبت قطع کند



برهان خطی است موازی با قاعده ب و
از مثلث ا ب و و اول فرض میکنیم که دو خط
ا د و د ب مقیاس مشترک باشند

و آن سه مرتبه در آن بکنیم و دو مرتبه در ا د ب و این تناسب پنجم می شود ا د : د ب = ۳ : ۲
و بر نقاط تقسیم ا ب خطوطی موازی با ب در رسم میکنیم و بر نقاط م و ن و ه و ل
خطوطی موازی با ا ب پس جمع مثلثات ا ل م و م ع ن و غیره نظیر متساوی
ضلع و دو زاویه طرفین متساوی باشند مثلاً در دو مثلث م ع ن و ن س ه
و دو زاویه م ع ن و ن س ه نظیر متوازی اضلاعشان متساوی باشند و نیز دو ضلع
م ع ن و ن س نظیر متساویان با دو خط ل ف و د ف متساوی باشند
پس از تساوی این مثلثات چنین پنجم می شود که ا م = م ن = ن ه = ه ل = ل ح

خطوط موازی با ا ب و ب و ا ب
خطوط موازی با ا ب و ب و ا ب

و چون ae دارای سه جزو از این است و de دارای دو جزو پس $ae : de = ۳ : ۲$
 و بعد از تقایید این تناسب با تناسب سابق چنین نتیجه می شود $ae : ab = ۵ : ۳$
 و اگر دو خط ae و ab هم باشند و مقیاس مشترک داشته باشند باید بطریق
 مشترک و ثابت نمود که همواره اندو خط بر نسبت ae و de است
 نتیجتاً - بکری تناسب مذکور این تناسبی می شود $ae : ab = ۵ : ۳$
 یا $ae : ab = ۵ : ۳$

و نیز $ae : ab = ۵ : ۳$ یا $ae : ab = ۵ : ۳$
 نتیجتاً - در دو خط ab و de اجزاء مفروزه
 بخطوط متوازیه ae و de و ab و de و غیره
 تناسب باشند زیرا که چون دو خط ab و
 de را ابتدا دو سیم تا بر نقطه e متقاطع شود
 در مثلث ade خط ae موازیت با قاعده de را آنوقت

$ae : de = ae : de$ و نیز در مثلث ade این ثابت می شود
 $ae : de = ae : de$ و بعد از وضع نسبت مشترک این تناسب

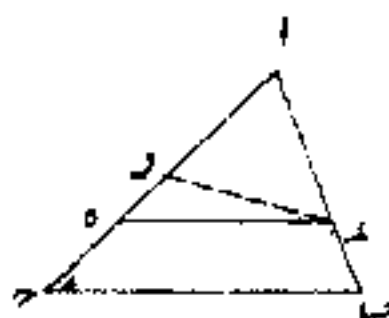
$$ae : de = ae : de$$

و همچنین ثابت می کنیم

$$ae : de = ae : de$$

قضیه هفتم

و بالعکس اگر در مثلث ade دو ضلع ae و de را خط ae چنان قطع
 نمود که با مثلث ade $ae : de = ae : de$ یعنی بر نسبت واحد پس خط قاطع
 موازات قاعده de باشد

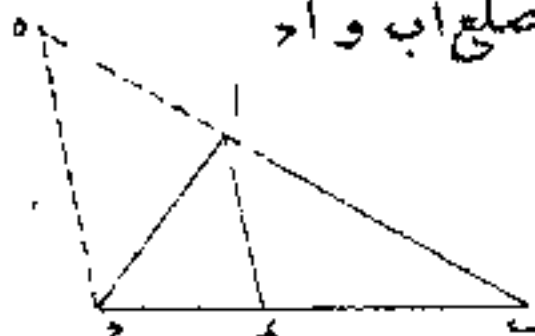


برها اگر کوئیده موازی نیست با فرض کنیم
در بموارات آن باشد و آنوقت بحکم شکل سابق اید:
= ا: د: د و بنا بر فرض ا: د: ب = ا: ه: ه
پس نظر نسبت مشترکه ا: د: د = ا: ه: ه و

بعد از تبدیل ا: د: ا = د: ه: ه و این تناسب صحیح نیست چونکه از طرفی مایلی ا: ه عظم از
ا: د و از طرفی مایلی د: ه اصغر است از د: پس خطی که از نقطه د بموارات ب: د رسم
شود منطبق خواهد شد بر د: یعنی این خط قاطع موازی خواهد بود با قاعده مثلث
شماره - اگر خط قاطع این تناسب درست اید: ا: ب = ا: د = ا: ح: ا: ه باز حکم مذکور
صحیح است زیرا که بعد از تفصیل چنین شود ا: ب = ا: د = ا: ح = ا: ه: ا: ه
یا چنین ب: د = ا: د = د: ه: ا: ه

قضیه چهارم

در مثلث ا: ب: ج اولاً خط ا: د منصف زاویه ا: قاعده ب: ج را قطع کند
و د: ج: ب = د: د: د متناسب با د: و ضلع ا: ب و ا: د
و ثانیاً خط ا: د منصف زاویه خارجی ج: ح: ا: ه متحد میکند و امتداد قاعده
د: و قطعه ب: ج و د: را بر نسبت اند و ضلع ا: ب و ا: د



برها حکم اول بر نقطه د خط د: ه را بموارات
د: ا: رسم کنیم تا اشتقاق با د: را بره قطع کند
آنوقت در مثلث ب: ج: د خط ا: د موازی است با

قاعده د: ه و این تناسب صحیح خواهد بود
ولی مثلث ا: د: ه متساوی الساقین است زیرا که نظر موازی د: و ضلع ا: د و د: ه زاویه

ا ح = ا د و زاویه ا ح د = ب ا د و بنا بر فرض ا ح د = ب ا د پس زاویه

ا ح د = ا ح د و بنا برین ا ح د = ا ح د حال چون در شاسب سابق ا د را بجای ا ه قرار

دیم چنین میشود $ب د : د ح = ا ب : ا ح$

بر کما حکم کنیم را بموارات و اگر کم یکد وقت

در مثلث ب ا د این شاسب حاصل میشود

ب د : د ح = ب ا : ا ح و مثلث ا ح د و ب د ح

سابق مساوی الساقین است یعنی $ا ح = ا د$ پس $ب د : د ح = ا ب : ا ح$

فلیکن چون نقطه ا در سطح مثلث پیر کند بر وجهی که نسبت ا ب به ا ح ثابت و برقرار باشد

ماند و آنرا چ فرض میکنیم دو خطی که در هر موضع ا د و زاویه ب ا ح و ه ا ح را

کنیم واره مرور نمایند بر همان دو نقطه ششجیه و در زیر که دو نسبت $ب د : د ح$ و $ب د : د ح$

باز مساوی هستند با $ب د : د ح$ و با بحالت برقرار و چون دو خط ا ح و ا د منصف دو زاویه

مجاور و پیوسته بر یکدیگر عمود اند پس خط ا ح بر سطح حرکتش نماید واقع شود بر محیط دایره

که بر قطره رسم شود و بنا بر این مکان هندسی نقاطی که دو فاصله جمع

از دو نقطه ب و د بر دست مفروض ثابتی باشد ذاین است

که مثلثات تشابهنا مندر که زوایای شان مساوی باشند و اضلاع متناظره

متناسب و مقصود از اضلاع متقابل و متناظره آنها است که متقابل باشند زوایای متساوی

و و کثیره از اضلاع متساویه مانند که زوایای شان نظیر نظیر مساوی باشد و اضلاع متقابل

متناسب مقصود از اضلاع متقابل آنها است که متقابل باشند زوایای متساوی

قضیه نهم

در دو مثلث متساوی الزوایا اضلاع متناظره متناسب باشند



مثلاً دو مثلث مفروض اب د است و د ه
که زوایای شان نظیر بنظر متساویست از اینقرار اب د
= د ه و اب د = د ه و ا د ب = د ه
و میگوئیم که اضلاع مناظره از اینقرار متناهیستند

$$ب د : د ه = ا ب : د ه = ا د : د ه$$

برها و وضع مناظره د و د ه را بر یک استقامت قرار میدیم و وضع با
و د را هسته دادیم همیشه تا بر نقطه و مستداتی شوند

آنوقت چون خط ب د مستقیم است و زاویه ب د ا = د ه وضع ا د موازی
با د ه و با د ه و همچنین چون زاویه اب د = د ه خط اب موازیست با د ه
پس شکل ا د د موازی از اضلاع است

و در مثلث ب د ه خط ا د موازیست با قاعده د ه و بنا بر این د خط ب د
د ه = ب ا : ا د و چون بجای ا د مساویش د ه را قرار دهیم چنین شود

$$ب د : د ه = ب ا : د ه$$

و بر همان مثلث ب د ه چون ضلع ب د را قاعده فرض کنیم خط د ه موازیست با
آن و بنا بر این ب د : د ه = د ه و چون بجای د ه مساویش ا د را قرار
دهیم چنین میشود ب د : د ه = ا د : د ه

پس نظریه نسبت مشترک ب د : د ه از دو تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود

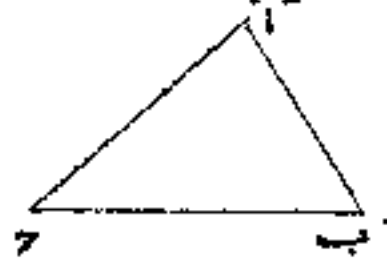
$$ا د : د ه = ب ا : د ه$$

پس دو مثلث متساوی الزوایای ب ا د و د ه اضلاع متقابلشان متساوی
شد و بنا بر تعریف سابق متساوی باشند

نتیجه - بی شرط تساوی دو مثلث همین کیفیت که دو زاویه اش نظیر نظیر مساوی باشند
زیرا که آنوقت زاویه سیم آنها نیز مساوی میشود و بعد اضلاع متناسب

قضیه دسستم

دو مثلث متناسب الاضلاع متساوی الزوایا باشند



مثلاً $b : c = d : f$ و $a : c = e : f$

$a : b = e : d$ و میگوئیم دو مثلث

$b : c = d : f$ و $a : c = e : f$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$

هستند یعنی $a : b = e : d$ و $a : c = e : f$ و $b : c = d : f$

برهان - بر نقطه e زاویه d را مساوی b رسم میکنیم و بر نقطه f زاویه c

را مساوی c و زاویه سیم e خود مساوی شود با a و دو مثلث ab و ed

متساوی الزوایا گردند پس بنا بر قضیه سابقه $b : c = d : f$ و $a : c = e : f$ و بنا بر فرض b :

$b : c = d : f$ و $a : c = e : f$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$

بنا بر همان قضیه $b : c = d : f$ و $a : c = e : f$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$

پس $b : c = d : f$ و $a : c = e : f$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$ و $a : b = e : d$

دو مثلث مساوی و $a : b = e : d$ و $a : c = e : f$ و $b : c = d : f$ و $a : b = e : d$ و $a : c = e : f$

$a : b = e : d$ و $a : c = e : f$ و $b : c = d : f$ و $a : b = e : d$ و $a : c = e : f$

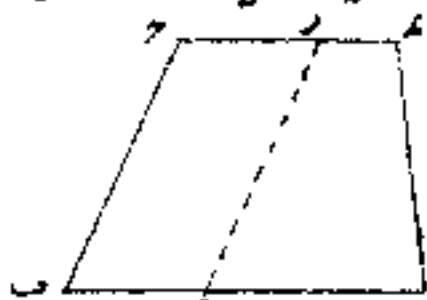
شرح - باید گفت تویم که زوایای متساویه دو مثلث مقابل باشند با اضلاع متناسبه

۲ - از این دو شکل چنین استنباط شد که تساوی زوایا لازم دارد تناسب اضلاع را

و بالعکس تناسب اضلاع تساوی زوایا را بر وجهیکه در تحت نشانه مثلثات و جوکی از

این دو شرط کافی باشد ولی این صحت محقق نیست باشد و در سایر اشکال که عدد

اضلاعشان از سه تنجا و رکنه جنبت مشدد و اربعه اضلاع میتوان بدون تغییر و
نسبت اضلاع را تغییر داد و نیز بدون تغییر اضلاع مقدار زوایا را تغییر داد و از آنجا



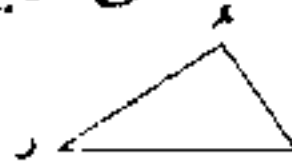
از تساوی زوایا شانسب اضلاع لازم نیاید و برعکس آن
چنانچه اگر در رابضات ب و ج رسم کنیم زوایای
دو اربعه اضلاع مساوی باشند بازوایای

دو اربعه اضلاع اب و ج و علی اضلاع بر یک نسبت باشند و نیز بدون تغییر چهار ضلع
اب و ج و د و ه میتوان در زاویه ب و د را دور نزدیک نمود و مقادیر
جمع زوایا را تغییر داد

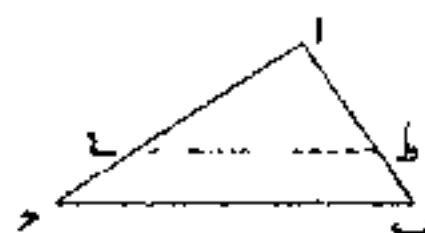
شرح ۳- چون دو قضیه مذکور را که حکم یک شکل دارند ترکیب کنیم ما شکل ع و س این
احکام مفیده تره کثیرا استعمال ترجمه احکام اصول شده استند و میتوان گفت که از روی
همین دو مسئله حکم جمیع مسائل حل شوند و در عیانت از کفایت کند و نکته اش اینست که
هر شکل را بتوان بمثلثات قسمت نمود و بر مثلث را بدو مثلث قائم الزاویه و از آنجا خواص
کلیه مثلثات ضمیمه و ارا باشند خواص جمیع اشکال را

قضیه بیست و یکم

هرگاه در دو مثلث یک زاویه مساوی باشد و دو ضلع طرفین
متناسب اند و مثلث متساویه باشند



فرض میکنیم زاویه $a = d$ و نسبت $ab : d = 71 : 5$



د و میگوئیم مثلث اب ج شبیه است بمثلث د ه
برینا ط را مساوی د ه جدا میکنیم و ط را به ب و ج
ب و ج رسم میکنیم پس زاویه ط ب و ج مساوی شود بر زاویه

اب و د و ه و مثلت ا ط و روایای مساوی شود باز روایای مثلت اب و د
 اب : ا ط = ا د : ا و و لی فرض اب : د ه = ا ح : د و بعمل ا ط = د ه پس این
 مناسب در سه جمله مشترکند و بنا بر این ا ط = د و پس در دو مثلت ا ط و د ه
 وضع و زاویه بینا مساوی است و این دو مثلت مساوی باشند و چون مثلت
 ا ط شبیه است بمثلث اب د پس د ه نیز شبیه بمثلث اب د

قضیه بیست و دوم

هر دو مثلت که اضلاعشان متوازی باشند یا عمود بر یکدیگر باشند
 بر آنها فرض میکنیم ا د ب و د روایای یکی از دو مثلت باشد و ا و ب و د روایای
 مثلت دیگر

و میدانیم که اضلاع د و زاویه هرگاه متوازی باشند یا عمود نسبت بهم اند و زاویه مساوی
 باشند یا تمام بر یکدیگر فرضهای ممکنه منجر بشود در یکی از این سه صورت

$$\text{اولاً} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \quad \text{و} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \quad \text{و} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱$$

$$\text{ثانیاً} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \quad \text{و} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \quad \text{و} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱$$

$$\text{ثالثاً} \quad ۱ = ۱ \quad \text{و} \quad ۱ = ۱ \quad \text{و} \quad ۱ = ۱ \quad \text{و بنا بر این} \quad ۱ = ۱$$

فرض اول مجموع روایای دو مثلت مساوی میشود بیش قائمه

و بر فرض دوم مجموع از چهار قائمه تجاوز کند

پس همان فرض سیم صحیح و مقبول باشد و بنا بر این دو مثلت مساوی الزوا یا اوانو متشابه

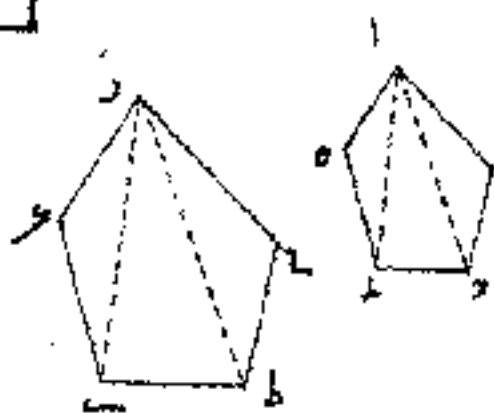
تدبیر در این شکل اضلاع متناظره دو مثلت آنها باشند که متوازی یا عمود بر یکدیگر

قضیه بیست و سوم

دو کثیرالاضلاع متشابه را میتوان قسمت کرد عددی از مثلثات متشابه و متشابه

مقاله ششم

۸۸



نمودار در کثیرالاضلاع ا ب ج د ه از زاویه
د و قطر ا ح و اند و این دو ای غیر مجاوره و اصل
میکنیم و در کثیرالاضلاع دیگر ب ج د ه ک
غیر یمنی از زاویه و نظیر ا د و قطر ب د و در
را وصل میکنیم آنوقت نظیر تشابه دو کثیرالاضلاع

زاویه ا ب ج د ه نظیر خود و ب ج د و ضلع ا ب د و تشابه باشند با نظیر خود و
ب ج د یعنی ا ب ج د ه ب ج د یعنی در آن دو مثلث یک زاویه مساویست و دو ضلع
طرفین متناسب پس تشابه باشند و زاویه ب ج د مساوی شود با ج ط د و چون این دو
زاویه مساوی را وضع کنیم از دو زاویه مساوی ب ج د و ج ط د باقی میماند ا ج د و ب ج د
و حال آنکه شد که نظیر تشابه و مثلث ا ب ج د و ب ج د نسبت ا ج د ب ج د و ب ج د
و نظیر تشابه دو کثیرالاضلاع ب ج د و ب ج د و ب ج د پس سبب مشترک نسبت این
و ب ج د و ب ج د و قبل از این ملاحظه شد که زاویه ا ج د و ب ج د و ب ج د و ب ج د
و ب ج د نیز دارای یک زاویه مساوی و دو ضلع طرفین متناسب اند و بنا بر این تشابه باشند
و بهین وجه ثابت میکنیم که سائر مثلثات قریب تشابه اند و از این مقدار دو کثیرالاضلاع
تشابه مرکب باشند از عدد واحد از مثلثات تشابه و تشابه بهر وضع
شرح - عکس قضیه مذکوره نیز صحت است یعنی اگر دو کثیرالاضلاع مرکب یا
از یک عدد از مثلثات تشابه و تشابه بهر وضع تشابه اند
زیرا که از تشابه مثلثات تشابه می شود که ا ب ج د ه ب ج د و ب ج د و ب ج د و
ا ج د و ب ج د پس ب ج د و ب ج د و ب ج د و ب ج د و غیره و علاوه بر
از تشابه سائر مثلثات این تناسب سلسله نتیجه شود ا ب ج د ه ب ج د و ب ج د

= ا ح : و ط = د : ط و غیر پس زوایای و کثیر الاضلاع متساوی شد

واضدشان متناسب و بنا بر این متشابهند

قضیه بیست و پنجم

خطوط ا ر و ا ط و غیره که از رأس مثلث بقاعده اش ب و وصل شوند
انقطاع و موازیش ده را بیک نسبت قطع کنند این متناسب نتیجتاً شود

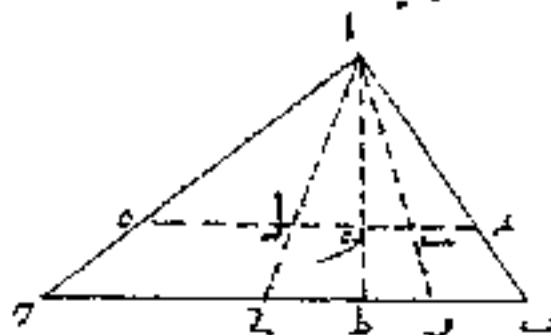
د : ب = د : ب = د : ب = د : ب و غیره

پس خط د چون موازیست با ب و دو مثلث ا د ب و ا ب ر متساوی
الزوا یا باشند و بنا بر این د : ب = د : ب = د : ب و همچنین نظر بتواری د و د و ر ط

متناسب حاصل شود ا : د = د : ب و ا : د = د : ب

و بسبب اشتراک نسبت ا : د این تناسب حاصل

شود د : ب = د : ب = د : ب و د : ب = د : ب



و بهما نوجده این تناسب حاصل شود د : ب = د : ب و د : ب = د : ب

د : ب = د : ب و د : ب = د : ب و د : ب = د : ب و د : ب = د : ب
نسبت که خط ب بر نقاط د و ط و د : ب = د : ب و د : ب = د : ب

نتیجتاً پس اگر ب را بر نقاط د و ط و د : ب = د : ب و د : ب = د : ب
نیز بر اجزای متساوی قسمت شود بر نقاط د و ط و د : ب = د : ب

قضیه بیست و ششم

چون از زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه ب ا ح عمود ا د را بر وتر خارج
کنیم

اولاً دو مثلث ج ز ب و ا د ح متشابهند و متشابه با مثلث کل

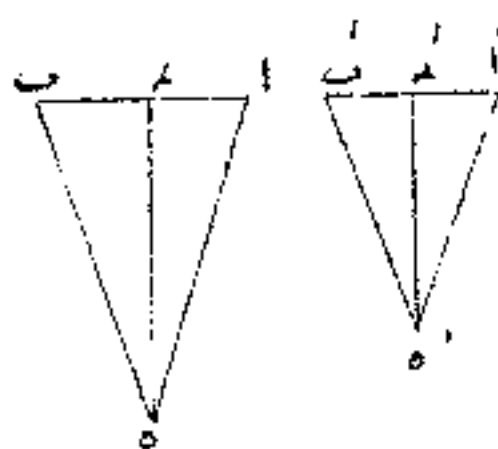
ثانیاً هر کدام از دو ضلع ا ب و ا ح واسطه هندسی باشند ضامین و توج

مساحت کثیر الاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایره محاطیه

برهان در شکل سابق کثیر الاضلاع مفروض ۲ ط - ۱ ک ... بهت و مساحت مثلث
 $2 ط = ط \times \frac{1}{2} م$ و مساحت مثلث ط م = ط - ۱ ک $\times \frac{1}{2} م$ ف ولی ف
 $2 م = 2 ط - 1 ک$ پس مساحت مجموع دو مثلث = $(2 ط + 1 ک) \times \frac{1}{2} م$ و چون بهین
 وجه در سایر مثلثات پیش ویم معلوم میشود که مساحت مجموع آنها یعنی مساحت کثیر الاضلاع
 تمام = مجموع قواعد ط + ط + ... که محیط شکل باشد ضرب در $\frac{1}{2} م$ که نصف
 شعاع دایره محاطیه باشد

مشرح - شعاع دایره محاطیه یعنی م بعینه عمودیت که از مرکز بر یکی از اضلاعش خارج
 شود و آنرا گاه ارتفاع کثیر الاضلاع نیز گوئیم
 قضیه هشتم

دو کثیر الاضلاع منتظم که عدد اضلاعشان برابر باشد محیطشان بر
 نسبت دو شعاع دو دایره محیطه است نیز بر نسبت دو شعاع دو دایره
 محاطیه و سطوحشان بر نسبت مربعات همان شعاع است



برهان اب ضلع یکی از اندو کثیر الاضلاع است
 و مرکز نش و بنا بر این شعاع دایره محیطه
 اش و عمود بر اب شعاع دایره محاطیه
 و بکذا اب ضلع کثیر الاضلاع دیگر که مشابه است
 و مرکز نش و شعاع دایره محیطه اش و

و شعاع دایره محاطیه اش محیط دو کثیر الاضلاع بر نسبت دو ضلع اب و اب است

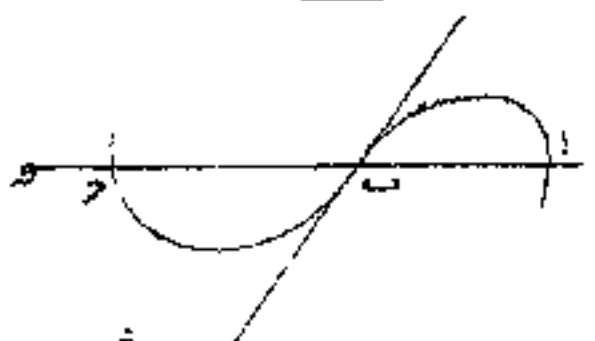
هندسہ

و در زاویہ او ا چون هر کدام نصف زاویہ کثیر الاضلاع است مساوی باشند همچنین
 در زاویہ ب و ب پس دو مثلث ابه و ابه متشابه باشند همچنین و مثلث
 قائم الزاویہ اده و اده پس اب : اب = اه : اه = اده : اده پس محیط و کثیر
 الاضلاع متناسب باشند بر نسبت دو شعاع اه و اده از دو دایرہ محیطہ و نیز بر نسبت
 دو شعاع م و م از دو دایرہ محیطہ

و چون سطح دو کثیر الاضلاع بر نسبت مربع دو ضلع متناظر اب و اب اند پس متناسب
 باشند بر نسبت مربع دو شعاع اه و اده از دو دایرہ محیطہ و بر نسبت مربع دو شعاع
 م و م از دو دایرہ محیطہ

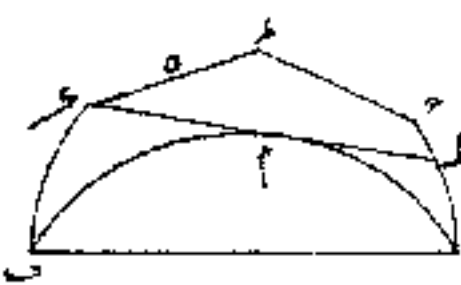


درست است که
 تعریف



خط منحنی محب است که چون بر هر نقطه اش
 خطی مماس کشید تمام منحنی در یک سمت بماند
 خط منحنی محب را چون خطی قطع کند فصل کشد
 از دو نقطه بیشتر نباشد پس اگر خط م ن

منحنی را بر سه نقطه ا و ب و ج قطع کند ظاہر است که چون مماسی بر یکی از نقاط مابین مثل
 ب رسم کنیم خط از منحنی تا یک سمتش افتد و قطع بہت دیگر
 و محیط دایرہ خط منحنی است محب



قضیہ

خط محب ا م ب اقصر از هر خطی که بر آن باشد
 نمود ما را برای منتهی شدہ باشد و

بولها. اگر بگوئید ام ب نیست اقصر از مجموع خطوط محیطی اش پس میان این خطوط باید خطی پیدا شود
اقصر از باقی که کوچکتر باشد از ام ب یا منتهایش برابران باشد
چنین خط را ا ح د ه ب فرض میکنیم و بر نقطه از خط ام ب که غیر مشترک باشد در و
خط مثل م ماس ل م ل که را رسم میکنیم این خط مندرج شود و این دو خط ام ب و
ح د ه ب چونکه اولی محدب است و خط ل که اقصر است از ل ح د ه ل نه پس چون
بجای نقطه ل ح د ه ل خط مستقیم ل ل را قرار دهیم خط محیطی ال که ب اقصر شود از ا
ل ل ب و حال آنکه بفرض ما خط اخیر اقصر بود از باقی پس فرض باطل است و جمیع خطوط
محیطیه طولند از خط ام ب



و بهین وجه ثابت کنیم که خط محدب است و
ام ب اقصر است از هر خطی که از طرف بر آن حاطه
نموده باشد

قبل از ذکر اصول بحث حد و دکه در مساحت اشکال منحنیه بآیند شرح معانی بعضی
اصطلاحات مستعمله بیاید نیست
مقدار تغییراتی است که حالات و اوضاع مختلفه گشت متدرج با آن تعلو گیرد
حد عبارت از مقدار است ثابت که مقدار تغییر پذیر تا هر مقام تواند زبان نزو یک شود
ولی تواند زبان رسد

در علم حساب هندسه مثلثه عدیده است از مقادیر تغییر پذیر و از حد و دکه بهشتان
انمقا ویرسیل میکنند

مثلا میدانیم که مقدار زاویه کثیر الاضلاع مثلثی که صاحب ضلع با نیست $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ و چون فرض کنیم عدد اضلاع متدرجاً ترقی کند تا ما لا نهایت معلومت که مقدار زاویه

ترقی کند و آنوقت که را با اندازه بزرگ فرض کنیم کسر $\frac{1}{2}$ کوچکتر شود از هر مقدار فرضی
و معلوم شود که مقدار برقی لیه را رویه کثیر الاصله شغل حدش دو قائم است
و همچنین اگر اب را بر نصف کنیم و ب برابر $\frac{1}{2}$ و بکذا

آنوقت می بینیم که خطوط a و a و a و a حد مقدارشان اب است
و از اینگونه امثال پیش می توان آورد

ولی باید این فیه را پسند داشت که ممکن است مقدری تغییر کند و حدی نداشته باشد
مثلاً مجموع a جمله اول تا b می باشد و مقدار a تغییر پیدا می کند و مجموع را حدی نباشد
جز در این صورت که تناسبی نباشد و لی اگر متغیر باشد مجموع a را غیر نهایی است
قضیه کی هسما

هرگاه دو مقدار تغییر پذیر a و b در ضمن تغییر تقریباً به حدشان پیوسته
متناوبی باشند و حدشان a و b نیز متناوبی باشند
بر هما فرض کنیم و تغییر پذیر a و b در تحت حد خود بمانند و تجاوز نکند و این دو
را قرار می دهیم $a + b = 1$ $a + b = 1$ $a + b = 1$

(و ب و ه ممکن است کوچکتر از هر مقدار فرض شوند)

و چون تساوی a و b را از اول تقریب کنیم این تساوی حاصل می شود $a + b = 1$ $a + b = 1$
 $a + b = 1$ (چونکه بنا بر فرض $a = 1$)

حال اگر ما بین a و b تفاضلی مثل a فرض کنیم این تساوی حاصل شود $a + b = 1$
و اینحال است چونکه a و b و بنا بر این تفاضلشان از هر مقدار فرضی کوچکتر شود
و اگر دو تغییر پذیر در تقرب تجزیه خود متناقص میشدند متنازید و دلیل باشد که کور بود

قضیه یازدهم

هرگاه دو مساوی γ و δ حاصل ضرب یک حد خود ϵ و ϵ میل کنند
خود حاصل ضرب $\gamma \times \delta$ حدش $\epsilon \times \epsilon$ باشد
برهان این دو تساوی را قرار می‌دهیم $\epsilon + \gamma = \epsilon$ و $\epsilon + \delta = \epsilon$
و آنها را در هم ضرب می‌کنیم چنین می‌شود

$$\epsilon \times \epsilon = \epsilon \times \gamma + \epsilon \times \delta + \epsilon \times \epsilon$$

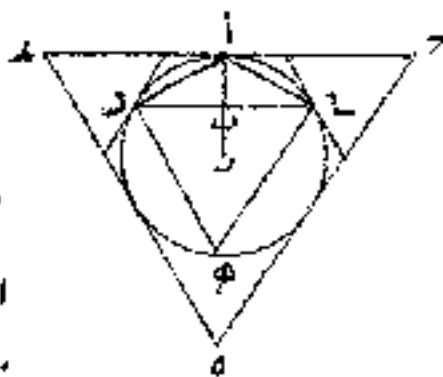
و چون هر قدر γ و δ به ϵ نزدیک شوند و مقدار ϵ و ϵ به نهایت شل می‌شود
مستطیقه $\epsilon \times \epsilon$ و $\epsilon \times \gamma$ و $\epsilon \times \delta$ بی اندازه کوچک شوند پس مجموعشان نیز هر چند می‌خواهیم کوچک
تواند شد پس مقدار $\epsilon \times \epsilon$ هر چند می‌خواهیم تواند نزدیک شد به $\epsilon \times \epsilon$

و چون حکم در حاصل ضرب دو حال مبرهن شد بی زحمت میتوان از آن چند حال جاری ساخت
نتیجه که حد خارج قسمت دو تغییر پذیر γ و δ مساویست با خارج قسمت دو حدشان

قضیه شانزدهم

اولاً محیط دایره حدیثیت مشترک که به تقش میل میکند دو محیط دو کثیر الاضلاع
مستطیم متشابه محاطی و محیطی که عدد اضلاعشان بتضاعیف ترقی کنند
ثانیاً مساحت دایره حدیثیت که به تقش میل میکند سطوح همان اشکال

اولاً فرض می‌کنیم γ و δ کثیر الاضلاع مستطیم محاطی و محیطی
و ϵ و δ کثیر الاضلاع مستطیم محیطی و طول محیط δ را
مندرج است باین دو محیط این دو کثیر الاضلاع و عدد
اضلاعشان را متصل ضاعف کنیم از روی خود شکل
ظاهر می‌شود که محیط کثیر الاضلاع محاطی روی تریز می‌شود



و محیط کثیر الاضلاع محیطی روی مبتنا قص کندارد

پس این دو محیط همواره بایره نزدیکتر شوند هر چند عدد اضلاع بیشتر مضاعف شود و اگر همین نسبت در ثابت کنیم تفاضل با این آنها ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود مگر این میشود که آن دو محیط هر چند بخواهیم بایره توانند نزدیکتر شوند

فرض میکنیم m و m محیط دو کثیر الاضلاع ۷۰۰۰۰ و ۷۰۰۰۰ باشد پس

$m : m :: r : r$ و بتفصیل نسبت $m - m :: r - r$ و $r - r :: r - r$

و بنا بر این $m - m :: r - r$

و چون با اقصر است از ۱۰۰۰۰ و اقصر است از ۱۰۰۰۰ و ترش و قوی

موتربنی اندازه کوچک شوند از آنجه که در سلسله شایب بر نسبت ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰

و شکل کنند و m نیز روی مقبرل است و r مقدارش ثابت پس کسری

این مقدار درست است و m و r در چنان فتنه میشود که m و r بایره بهجت صغریز و یک m و r

ثانیاً فرض میکنیم m و m مساحت همان دو کثیر الاضلاع باشد و مانند کور

ثابت میکنیم که چون عدد اضلاع آنها روی ترقی کنند و m و r بایره بسط و ایر

نزدیک شوند و مگر این شود که حد آن وسط و ایره است همین قدر که بنمایم m و r

ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود پس گوئیم بنا بر این

$m : m :: r : r$ و بتفصیل نسبت $m - m :: r - r$ و $r - r :: r - r$

و بنا بر این $m - m :: r - r$

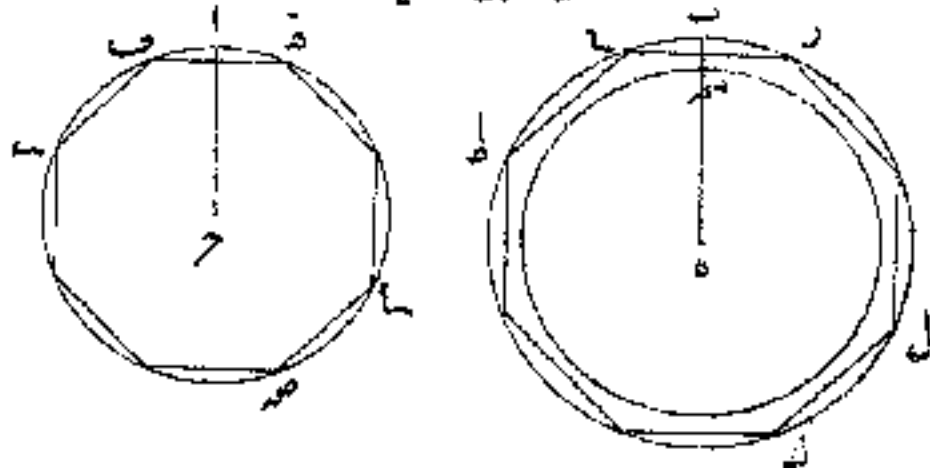
و ظاهر است که این تفاضل به اندازه مائل است نسبت صغریز که چون عدد اضلاع

مضاعف شود m و r می توانند بایره و m و r که اقصر است از m و r ممکن است به

اندازه کوچک شود و ثابت است که m و r مطلوب

بقیه خد رفا عا شاکل کثیر الاضلاع مستقیمه محیطه شعاع دایره است
قصیده سیزدهم

اولاً نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مثل طول اشعه آنها باشد
ثانیاً نسبت سطوح دو دایره بیکدیگر مثل مربعات همان اشعه باشد



اولاً محیط می کنیم در دو دایره که شعاع ه ب و ج اند دو کثیر الاضلاع مستقیم
وم و محیط آنها باشد و ه و ج و شعاع ه ب و ج ا و د و د

و محیط دایره پس و ج $\frac{ه}{ج} = \frac{د}{د}$

حال چون ه د ضلع کثیر الاضلاع محیطی را بی اندازه تضعیف کنیم و محیط م و
بی اندازه نزدیک شوند به د و د و بنا بر این ج و خارج قسمت $\frac{ه}{ج}$ میل کنند به
د و ه و ج و د و چون از تساوی دو تغییر پذیرش و بی و د و د شان لازم آید

و ه پس $\frac{ه}{ج} = \frac{د}{د}$ (۱)

ثانیاً سطح دو دایره را ج و د فرض می کنیم و مساحت دو کثیر الاضلاع منظم را به

محیطه را به و س پس و س $\frac{س}{ج} = \frac{س}{د}$

و چون ه د و مقلد $\frac{س}{ج}$ و $\frac{س}{د}$ این دو مقدار است $\frac{س}{ج} = \frac{س}{د}$ پس و ه

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} \quad (۲)$$

شرح - از تساوی (۱) این تساوی استنباط شود

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} \quad (۳)$$

یعنی که نسبت محیط هر دایره بقطرش مقدار است و مجموع دو ایر ثابت و این نسبت را ما در حساب در قانونی صریح باین عدد استغنی نمودیم (و ان سه حرف اول کلمات نسبت و محیط و قطر است) و در جمیع ممالک هندیه این برای علامت است بنمایند و آن حرف یونانی است و پی تلفظ شود پس نظر باین مختصار صورتش را نیز ثابت نمود و در این کتاب بهین علامت را بنمایم و مقدار این نسبت اصم است و تقریب استخراج شود و ان یکس هزار تا و اربعه و شصت

$$= ۳۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۰۰۰$$

و دستور استخراج این عدد تقریبی را عن قریب یوحی مختصر بیان میکنیم صل
حال چون در تساوی (۳) بجای $\frac{1}{25}$ معادلش را قرار دهیم این تساوی حاصل
میشود $\frac{1}{25} = \frac{2}{50}$ و بعد $2 = 50$ (۴) یعنی محیط هر دایره مساویست با شعاع
در ضرب شعاع

تقریب - دو دایره متشابه اب و دایره بر نسبت دو شعاع و دایره متشابه
ثانیاً دو قطاع متشابه ب دایره بر نسبت دو وتر و همانند شعاع باشند

اولاً بنا بر وراست قوس ب ا : محیط ا ح = ح : ع

و همچنین قوس د : محیط د ه = ه : ح

و نظر بتساوی و زاویه و این تناسب حاصل شود

قوس ب ا : قوس د ه = محیط ا ح : محیط د ه = ح : ه

ثانیاً بنا بر همان وراست قطاع ا ح ب : دایره ا ح = ح : ع



قطاع دایره: دایره $\frac{1}{2} = 1$: $\frac{1}{2}$

و بنا بر این قطاع احزاب: قطاع دایره $\frac{1}{2} = 1$: دایره $\frac{1}{2} = 1$: $\frac{1}{2}$

قضیه یانف

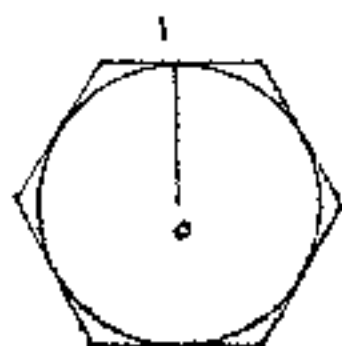
مساحت دایره مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع
بر دایره $\frac{1}{2}$ اکثر الاضلاع مشطی محیط میکنیم و فرض میکنیم محیط این اکثر الاضلاع باشد

و سه سطح و نه شعاع ما باشد پس $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

و چون عدد الاضلاع اکثر الاضلاع محیط را بی اندازه تضعیف

کنیم حاصل ضرب $\frac{1}{2} \times 3$ بی اندازه نزدیک شود

بمحیط $\frac{1}{2} \times 3$ و حد سه سطح دایره و پانزده



دایره $\frac{1}{2} = 1$ محیط $\frac{1}{2} \times 3$ و سابق ذکر شد که محیط $\frac{1}{2} \times 3 = 1$ پس بعد از تبدیل

مساحت دایره $\frac{1}{2} = 1$ $\frac{1}{2} \times 3 = 1$ $\frac{1}{2} \times 3 = 1$

مثال فرض میکنیم $\frac{1}{2}$ مقدار $\frac{1}{2}$ را تقریب $\frac{1}{2}$ از $\frac{1}{2}$ فرض میکنیم پس

مساحت دایره $\frac{1}{2} = 1$ $\frac{1}{2} \times 3 = 1$ $\frac{1}{2} \times 3 = 1$

نتیجه مساحت قطاع دایره مساویست با حاصل ضرب طول قوسش در نصف شعاع

بر تمام نسبت قطاع احزاب تمام دایره مثل

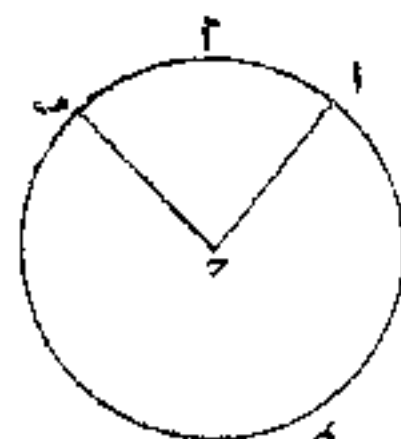
فرض $\frac{1}{2}$ است تمام محیط $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

یا مثل $\frac{1}{2}$ است به $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \times 3 = 1$

و مساحت تمام دایره نیست $\frac{1}{2} \times 3 = 1$

پس مساحت قطاع احزاب این باشد $\frac{1}{2} \times 3 = 1$

مثال فرض میکنیم $\frac{1}{2}$ مقدار $\frac{1}{2}$ را تقریب $\frac{1}{2}$ از $\frac{1}{2}$ فرض میکنیم پس طول



مقاله چهارم

طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاطی چنین میشود

$$ط = ۲۷ \cdot ۵ = (۲۷ - ۵) \cdot ۲۷ = (۲۷ - ۱) \cdot ۲۷ = ۲۷ \cdot ۲۶ = ۷۰۲$$

مثال دستور (۲) فرض میکنیم ط ضلع معشر باشد و میخواهیم ضلع مخمس را معلوم کنیم

و از سابق میدانیم که ط = $\frac{۵(۵-۱)}{۲}$ پس

$$\frac{۲}{۵} = \frac{(۵-۱) \cdot ۲}{۵(۵-۱)} = \frac{(۵-۱) \cdot ۲}{۵ \cdot ۴} = \frac{(۵-۱) \cdot ۲}{۲۰} = \frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵}$$

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵} \quad \text{و بنا بر این}$$

بقیه - چون مربع شعاع را بر مربع ضلع معشر بگیریم این مجموع

$$۲۵ + \frac{۲}{۵}(۵-۱) = ۲۵ + \frac{۸}{۵} = ۲۵ + ۱.۶ = ۲۶.۶$$

مساوی میشود با $\frac{۲}{۵}(۵-۱) \cdot ۲$ که مربع ضلع مخمس باشد پس

ضلع مخمس محاطی و تر مثلث قائم الزاویه باشد که یکی از دو ضلع زاویه قائمه اش شعاع دایره باشد و ضلع دیگرش ضلع معشر

قضیه امثال

در صورتیکه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع مستطیل شعاع دایره

محیطی باشد میخواهیم استخراج کنیم ضلع کثیر الاضلاع محیطی متساوی الساقین را

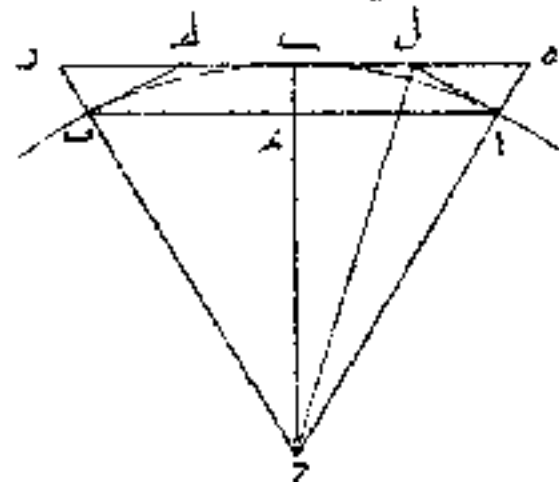
فرض میکنیم $ا ب = ۲$ و $ا د = ۵$

و $د = ۵$

و بشاید و مثلث $ا د د$ و $ا د ب$

$$ا د : ا ب = ا د : ا د$$

$$۵ : ۲ = ۵ : ۲$$



پس از این نسبت که $ا د : ا ب = ا د : ا د$ یا $۵ : ۲ = ۵ : ۲$ (۱)

هندکسته

در مثل قائم الزاویه احد این تساوی حاصل شود $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

پس $2:3 = 2:3$ و بنا بر این $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

قضیه ۹ امیست

در صورتیکه معلوم باشد ضلع اب از کثیر الاضلاع منتظمی که دارا
ع ضلع باشد و شعاع دایره محیطه منخواهیم مساحت آن کثیر الاضلاع
را استخراج کنیم

فرض میکنیم در شکل سابق اب $2 = 1$ و $3 = 2$ و مساحت شکل باشد

پس $2 = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ و $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

پس $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

مثال مطلوب است مساحت مساحت منقطه و $2 = 1$ و $3 = 2$ و $4 = 3$ و

پس $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

بنیاد - میتوان از روی همان مفروضات در شکل سابق مساحت کثیر الاضلاع
منتظم محیطی استخراج نمود که دارای 2 ضلع باشد

نقطه وسط وترس اب است و خط اب را وصل میکنیم وسط کثیر الاضلاع معلوم
که سه فرضش میکنیم مکتب میشود از 2 و مثلث متساوی که یکی از آنها 1 و 2 است

و $2 = 1$ و $3 = 2$ و $4 = 3$

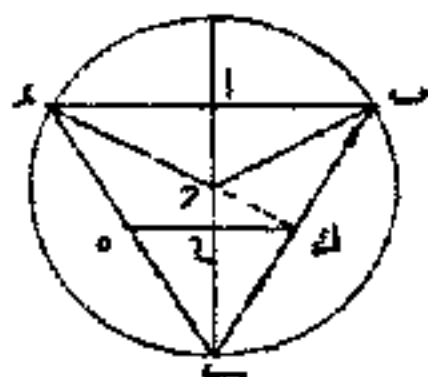
پس $2 = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

من باب مثال میخواهیم مساحت دوازده ضلعی منتظمی را معلوم کنیم

$2 = 1$ و $3 = 2$ و بنا بر این $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

قضیه ۱۰ امیست

در صورتیکه مفروض باشد ذایره شعاع $د = ۱$ و از کثیر الاضلاع
منتظم محتاجی ارتفاع $د = ۱$ ن میجویم معلوم کنیم شعاع $د$ و ارتفاع
ن از کثیر الاضلاع منتظمی که عدد اضلاعش مضاعف کثیر الاضلاع
مفروض باشد و محیطش مساویان



فرض میکنیم $ب$ ضلع کثیر الاضلاع منتظم مفروض
باشد و مرکز شش ارتفاع $وا$ را امتداد بدهیم
تا محیط را بر نقطه $ب$ قطع کند و دو خط $ب د$ و $ب ه$
را وصل میکنیم آنوقت $ب د$ زاویه مرکزی کثیر

الاضلاع مطلوب میشود چوکه مقدار شش نصف $ب د$ است چون عمود $د ک$
بر $ب د$ فرود آوریم و $د ه$ را بموازات $ب د$ رسم کنیم طول $د ه$ نصف $ب د$ میشود
و بنا بر این ضلع کثیر الاضلاع جدید است و $د ک$ شعاعش باشد و $د ه$ ارتفاعش
تساوی حاصل شود $۱ = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

$$یا \quad ۱ = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

و خلاصه در مثلث قائم الزاویه $د ک ه$ این تساوی حاصل شود $۱ = ۱ \times ۱$

$$یا \quad ۱ = ۱ \times ۱ = \frac{(۱ + ۱)}{۲} \times ۱ \quad (۲)$$

شرح این نکته هم از اصل شکل ظاهراًست و هم از روی دستوری که ن بزرگتر است از ن و
بر خلاف $د$ کوچکتر است از $د$ و از این قرار در کثیر الاضلاع جدید تفاضل با این شعاع و
ارتفاع کمتر است از آنچه در کثیر الاضلاع مفروض باشد

و چون همین وجه کثیر الاضلاع دوم را بنیمی تحول کنیم و آنرا بجای $د$ و $ه$ بگذاریم و کثیر
الاضلاعی برسیم که تفاضل با این شعاع و ارتفاعش کوچکتر باشد از هر مقدار مفروضی

برها - در مثلث ب ح ا این تساوی حاصل شود

$$ب ح - ۱۶ > ب ا - ۱۵ = ن > ب ا$$

و ب ا که نصف ضلع کثیر الاضلاع باشد بعد از آنکه عدد شعاع بیاض نصف شده
کوچکتر از مقدار مفروضی شود و بنا بر این د - ن نیز توانا کوچکتر شود از هر مقداری که
قابل اشاره حتی باشد

قضیه ۲ مسئله ۲

میخواهیم مقدار تقریبی نسبت محیط را بقطر استخراج کنیم

در اشکال سابقه بدین شد که محیط $d = 2\pi r$ و دایره $d = \pi r^2$

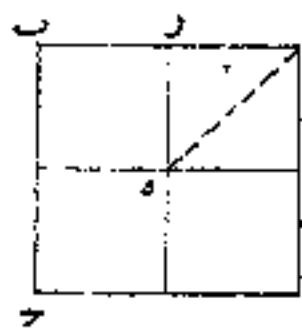
و از آنها این دو تساوی استخراج شود $\frac{محیط}{د} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r}$ (۱)

و از اینجا چهار قاعده در استخراج مقدار π استنباط شود

۱- زیرا که در دستور (۱) میتوان محیط را معلوم فرض کنیم و شعاعش را استخراج نمود
یا بالعکس شعاع را معلوم فرض کرد و محیط را استخراج نمود و در دستور (۲) نیز
میتوان شعاع را معلوم فرض کرد و مساحت دایره را استخراج نمود یا مساحت را معلوم
فرض کرد و شعاع استخراج نمود

و چون بنای این اصول است بذکر یک قاعده که گفتیم و آن قاعده اول است

که فرض میکنیم محیط d واحد باشد و میخواهیم از آن
طول شعاعش را معلوم کنیم شکل مربعی بر واحد طول



رسم میکنیم بر محیط چهار واحد شود
و فرض میکنیم d و n شعاع و n شعاع این مربع باشد

$$انوقت د = \frac{1}{4} و ن = \frac{1}{4}$$

مقاله چهارم

۱۳۴

حال بکلی سابقین مرتب را تحویل میکنیم یعنی که محیط مساوی آن باشد پس این دست
محل شود $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ و این $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
و بعد شعاع $\frac{1}{2}$ و ارتفاع $\frac{1}{2}$ از کثیر الاضلاع را استخراج کنیم که صاحب
ضلع باشد و بهمانند و چون همین طریق بهواره پیش رویم میسریم بکثیر الاضلاعی که
محیطش همان چهار واحد باشد و ضلع با این دو شعاع $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ که یکی کوچک باشد که بجز
و چون دو دایره رسم کنیم یکی شعاع $\frac{1}{2}$ و دیگر شعاع $\frac{1}{2}$ محیط اولی بزرگتر باشد از $\frac{1}{2}$ و محیط
کوچکتر از آن پس شعاع دایره که محیطش درست چهار واحد باشد واقع میشود با این $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$
هر حد تقریبی است با ششم استخراج شود پس اگر اندو شعاع را با عشر تحویل کنیم ظاهر است
ارقام مشترکه متعلق باشد به شعاع مطلوب

و اما مقادیر متناهی شعاع و ارتفاع کثیر الاضلاع $\frac{1}{2}$ ضلعی و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$
تا ۱۱۹۲ ضلعی را در جدول آورده ایم

اشهر

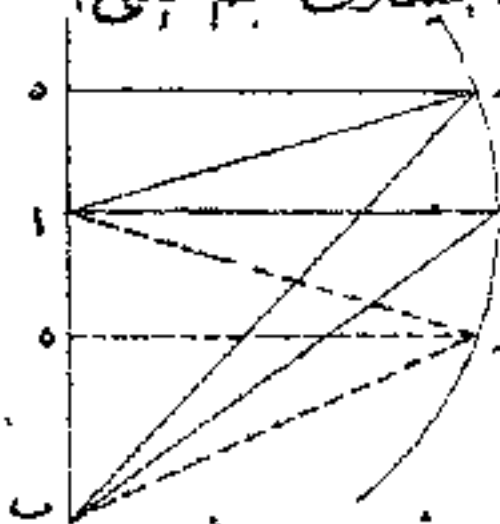
ارتفاعات

ضلع
عدد

۱۰۷۰۷۱۰۵۸ = ۱	۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۱	۴
۰۰۰۰۳۲۸۱۵ = ۲	۰۰۰۰۳۵۳۴ = ۲	۹
۰۰۰۰۰۰۷۲۸۹ = ۳	۰۰۰۰۲۸۴۱۷۴ = ۳	۱۶
۰۰۰۰۳۷۶۴۳۵ = ۴	۰۰۰۰۳۴۵۷۳۱ = ۴	۲۵
۰۰۰۰۳۶۸۷۵۴ = ۵	۰۰۰۰۳۶۱۰۸۳ = ۵	۳۶
۰۰۰۰۳۶۸۳۶ = ۶	۰۰۰۰۳۶۹۱۹ = ۶	۴۹
۰۰۰۰۳۶۳۵۷ = ۷	۰۰۰۰۳۶۵۸۷۸ = ۷	۶۴
۰۰۰۰۳۶۲۳۷ = ۸	۰۰۰۰۳۶۱۱۷ = ۸	۸۱
۰۰۰۰۳۶۲۰۷ = ۹	۰۰۰۰۳۶۱۷۷ = ۹	۱۰۰
۰۰۰۰۳۶۱۹۹ = ۱۰	۰۰۰۰۳۶۱۹۲ = ۱۰	۱۲۱
۰۰۰۰۳۶۱۹۷ = ۱۱	۰۰۰۰۳۶۱۹۵ = ۱۱	۱۴۴
۰۰۰۰۳۶۱۹۶ = ۱۲	۰۰۰۰۳۶۱۹۶ = ۱۲	۱۶۹

قضیه اول

میان جمیع مثلثاتی که ترکیب شوند از دو ضلع مفروض بنابر آنکه زاویه حادثه صابین آنها تغییر پذیر باشد و اختیاری اعظم مثلثی است که از دو ضلع عرض زاویه قائمه حادث کنند



مثلاً در دو مثلث ب ا د و ب ا ح که ضلع ب مشترک است و ضلع ا د = ا ح و زاویه ب ا مشترک است

قائم که گوئیم مثلث ب ا ح اعظم است از مثلث ب ا د که زاویه در آن حادثه باشد یا منفرجه

بر هر دو قاعده ا ب چون در هر دو مثلث نسبت دو اضلاع ا د و ا ح باشند ولی عمود عده ا ح است از دو ضلع متساوی ا د و ا ح پس مثلث ب ا ح بزرگتر است از مثلث ب ا د و این حکم کلی است در سایر مثلثات

قضیه دوم

در جمیع اشکال مضطرب متساوی القدر سطح دایره اعظم باشد

اولاً این مقوله معلومست که بر فرض اتحاد طول محیط اشکال میثاری پیدا میشود که از حیثیت صورت

و وسعت مختلف نباشد ولی این اختلاف بی اندازه نباشد و وسعت شکل تا حد معینی بزرگ

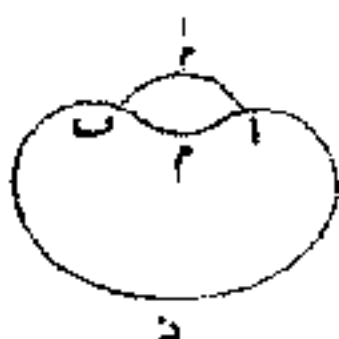
پس فرض میکنیم میان این اشکال متساویه الذو یک شکل اعظم یا بیشتر موجود باشند

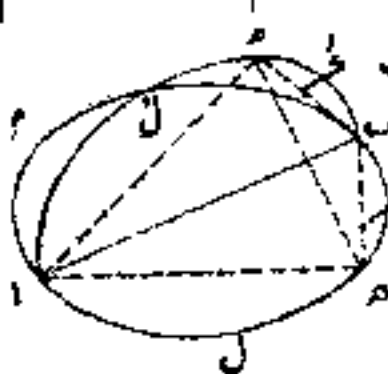
ثانیاً آن شکل که در محیط مفروض سطحش اعظم است

مجهول باشد زیرا که اگر در خط مسدود غیر مستقیم ا م ب

قطعه مقعر ا م ب را حول دو نقطه ا و ب دوران بدم

تا بوضع ا م ب قرار گیرد و شکل جدید ا م ب





محیطش برابر شکل اول است ولی سطح اعظم از او است
ثانی اگر $ام ب د$ شکل اعظم باشد محیط مفروض خط
آن محیط را نصف کرده باشد کو نیم سطح شکل را نیز دو قطعه متعادل
قسمت نموده زیرا که اگر یکوشه قطعه $اد ب$ اعظم است

از $ام ب$ آنرا حول خط $اب$ دوران میدهم تا قرار گیرد بر $اد ب$ آنوقت شکل $اد ب$
محیطش مساوی میشود با $ام ب د$ و حشش اعظم پس شکل مفروض $ام ب د$ اعظم نمی
باشد آنچه ذکر شد نیز معلوم میشود که اگر $ام ب د$ شکل اعظم باشد $اد ب د$ نیز اعظم است و
شکل اخیر هر عمودی که بر $اب$ اعراج کنیم مثل $د د$ با خط نصف میشود و وجهی دو
مثلث $اد ب$ و $اد د$ ب مساوی میگردد

بعد از این مقدمات اگر در زاویه $اد ب$ و $اد د$ ب قائمه باشند میتوان سطح هر دو مثلث
 $اد ب$ و $اد د$ ب را یکمرتبه وسعت داد تا یکی آنکه تغییری در طول اضلاع $اد د$ و $د ب$ و $اد$
و $د ب$ عارض نشود و نیز در طول قطعات $ال د$ و $د ل$ ب و $ال د$ و $د ل$ ب بی
همان قاعده $اب$ شمای تغییر کنند پس با این عمل سطح شکل وسعت یابد تا یکی آنکه طول محیطش تغییر نکند
و این خلاف فرض است پس وزاویه $د$ و $د$ قائمه باشند و نقطه $د$ که ماقص نمودیم
بود در هر جای محیط $اد ب$ میتوان قرار داد پس از این آنکه بسط نصف دایره است
بنابر این معلوم شد که اگر خطی شکل اعظم را نصف کند قطعه شش نصف دایره است پس خطی که
نصف دایره

قضیه ششم

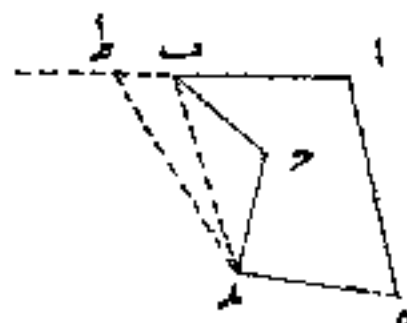
میان جمیع اشکال منظم متساویه الوضوع دایره محیطش اقصر است
بر همان اگر شکلی یافت شود بوسعت $م$ که محیطش اقصر از دایره باشد و مستطیل
آن میتوان بکم قضیه سابقه متبدل کرد از این دایره که صاحب همان محیط باشد و سطحش

اعظم باشد از ۲

پس این دایره ثانی سطحش اعظم شود از دایره اول و محیطش اقصی و این محال است

قضیه چهارم

هر کثیر الاضلاع مثل اب ح د ه را که دارای یک زاویه مقعر باشد می توان
مبدل نمودش بکثیر الاضلاعی محدب که وسعتش بیشتر باشد و محیطش
برابر و یک ضلعش کمتر

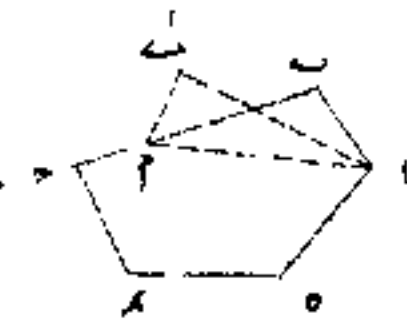


برهان چون لب را امتداد دهیم تا نقطه مخالفش را
وصل کنیم بنقطه ج مجموع ب ط + ط د روی تراز باشد
ابتدا از ب د الی غیر نهاییه پس در یک خط نقطه نیست
شود مثل ط که اینجا ب ط + ط د = ب د + د ه

و در آن نقطه کثیر الاضلاعی نزدیک شود مثل اب ط د ه که وسعتش طائر اعظم است
از شکل مفروض و محیطش برابر و است یک ضلع کمتر دارد

قضیه پنجم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویه الزامی که عدد اضلاعشان متساوی
باشد کثیر الاضلاع منتظم اعظم است



برهان در اثبات حکم مذکور باین وجه می رویم که
اگر کثیر الاضلاعی جمیع اضلاعش متساوی باشند
و همچنین جمیع زوایایش در جمله اشکال متساویه الزامی
که یک عدد ضلع باشند چنین شکل اعظم نتواند شد

اولا فرض می کنیم کثیر الاضلاع اب ح د ه صاحب ۵ ضلع باشد و اب ج د

و بر ب د نقطه م را انقدر نزدیک به د فرض میکنیم باز اب ب م و بعد زاویه
 ا م ب را مساوی ب ا م رسم میکنیم و م ب را مساوی اب جدا میکنیم و خط
 را وصل میکنیم و مثلث ا ب م مساوی میشود با مثلث ا ب م
 از این معلوم شد که میتوان کثیر الاضلاع اب د م را تبدیل نمود کثیر الاضلاع
 م د م که صاحب همان وسعت و همان محیط باشد چرا که عدد اضلاعش ۴ + ۱ است
 و دارای یک زاویه مقعر است زیرا که اب چون قعر است از ب م زاویه ب م ا صغر میشود

از ب ا م یا از ب م ا

و کثیر الاضلاع ثانی را بر قضیه سابقه میتوان تبدیل نمود بشکلی دیگر که صاحب ضلع
 و همان محیط و وسعتش بیشتر باشد پس معلوم شد که در جمله اشکال متساوی الاضلاع

ضلعی شکل اب د م مختلف الاضلاع اعظم نیست

ثانیاً در کثیر الاضلاع ع ضلعی اب د م فرض میکنیم
 زاویه ا ب د و نقطه م را انقدر نزدیک به ب فرض

میکسیم که زاویه م ا ب بزرگتر باشد از ا م د

و زاویه م اب را مساوی ا م ب رسم میکنیم و ضلع اب را مساوی م د جدا میکنیم و خط

را وصل میکنیم و مثلث م اب مساوی میشود با مثلث ا ب م و کثیر الاضلاع ا ب م د

وسعت محیطش برابر میشود با اب د م ولی عدد اضلاعش ۴ + ۱ است و دارای یک زاویه

مقعر است زیرا که چون ا م د + ا م ب = م ب پس ا م د + م اب < م ب فاصله

و این کثیر الاضلاع را میتوان تبدیل نمود بشکلی دیگر که صاحب ضلع باشد و همان محیط و

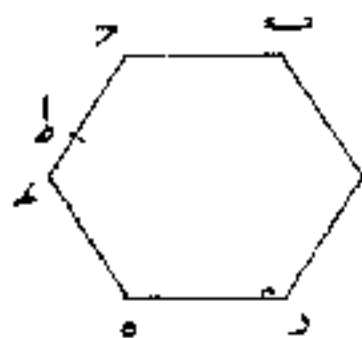
بیشتر پس اب د م اعظم نیست

قضیه ششم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویه الوُسعه که عدد اضلاعش هفت
باشد کثیر الاضلاع منتظم محیطش اقصا است

برهان اگر کثیر الاضلاع غیر منتظمی که صاحب ضلع باشد و بسعت م محیطش اقصا شود
از کثیر الاضلاع منتظمی که همان بسعت باشد و صاحب همان عدد اضلاع میتوانیم
قضیه سابقه بدست کنیم آنرا کثیر الاضلاع منتظمی که همان دور باشد و صاحب ضلع و
وسعتش مواعظ باشد از م پس این کثیر الاضلاع منتظم ثانی عدد اضلاعش برابر
یشد و محیطش قهراً وسعتش بیشتر و این محال است
قضیه هفتم

از دو کثیر الاضلاع منتظم متساویه الذاکره آنکه عدد اضلاعش بیشتر باشد
اعظم است

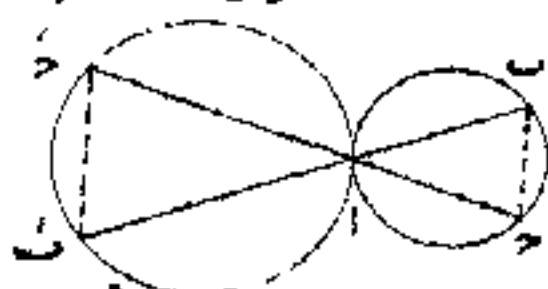


برهان فرض میکنیم ا ب ج د ه و کثیر الاضلاع
منتظم شش ضلعی باشد و نقطه ط را بر یکی از اضلاع
نشان میکنیم و آنوقت میتوان شکل را کثیر الاضلاع
غیر منتظم هفت ضلعی فرض نمود که زاویه حاشیه

بین و ضلعش ط د و ط ه و و قائمه باشد و پسین کثیر الاضلاع برابر
قضیه ه کوچکتر است از کثیر الاضلاع منتظم هفت ضلعی که همان دور
باشد فهو المطلوب

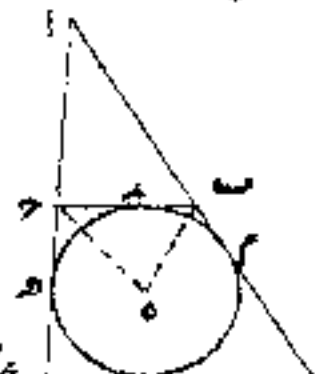
احکام مربع و مستطین

اولی شکلی که روشن و یابش بر اوساط اضلاع هر دو دایره ضلع باشد متوازیه الاضلاع است
 ۲- این خط مفروضه در درون مثلث متساویه الاضلاع چون سه عمود بر اضلاعش فرود آید مجموع آنها مقدری شود ثابت و آن حکم را در نقطه خارج مثلث نیز تحقیق کنید و به میند چه میگوید



۳- چون بر نقطه تماس از دو دایره مماس ب
 دو قاطع ب با و ح و ا را موزدیم ثابت کنید که
 دو خط ب ح و ب ا متوازی باشند

۴- در هر دو دایره ضلع محیط بر دایره مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر (هکس این مسئله نیز صحیح است)



۵- دایره ه را مماس کنیم بدو ضلع زاویه ا و خط
 ب د ح را مماس کنیم بدایره و منتهی بنمایم بدو ضلع
 زاویه پس می بینیم که او لا محیط مثلث ا ب ح

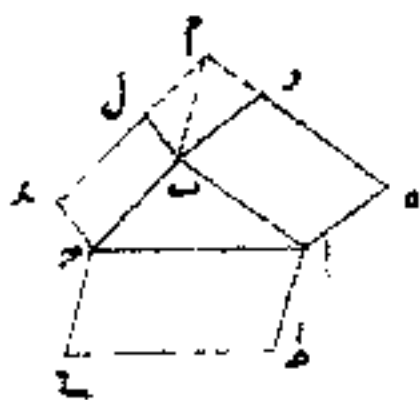
ثابت است در هر جا از ه متساوی است فرض شود و ما نیز مقدار زاویه ب
 ع چون مواقع سه ارتفاع مثلثی را باین هم وصل کنیم مثلثی جدید ترکیب شود که خطوط
 منصف الزوایش ارتفاعات مثلث اول باشد

۶- مواقع سه ارتفاع مثلث و اوساط سه ضلعش بر محیط دایره واقع شوند بر هر سه
 ۷- در شکل ذی اربعه ضلع چون بر سه ضلع متوازیش دایره مماس کنیم از مرکز چهار
 دایره مماسه که بدست می آید دو اربعه اضلاعی ترکیب شود که قابل محاط شدن در دایره
 ۸- دو خط منصف دو زاویه حاد را باین هر دو ضلع متقابل ذی اربعه ضلع می طری برآید

فایده متقاطع شوند

۱۰- چون از نقطه مفروضه بر دایره محیطه بر مثلثی عمود بر ضلع باشد مثلث فرود آوریم
مواقع آنها بر خط مستقیم واقع شوند

۱۱- بر دو ضلع اب و ج د مثلث اب د دو متوازی الاضلاعی مثل اب د و
ب د ل رسم کنیم و دو ضلع ه د و د ل را امتداد می دهیم تا نقطه م و خط م ب را وصل
میکنیم و با جمله بر ضلع اد متوازی الاضلاعی رسم می کنیم



که ضلع جی و د ه مساوی و موازی باشد با م ب پس
ثابت کنید که این متوازی الاضلاع معاد است با هم
و دو شکل دیگری و از آنجا شکل ع و س را شبیه می بینیم

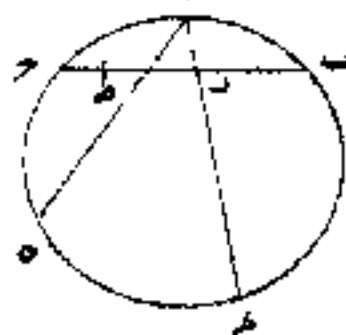
۱۲- سه ارتفاع مثلث بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۳- خطوط سه دایره باین روش مثلث و اواسط اضلاعش بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۴- نقطه تقاطع سه ارتفاع مثلث و نقطه تقاطع خطوط منصف قواعدش و مرکز دایره
محیطه اش بر خطی مستقیم واقع شوند و فاصله باین دو نقطه اول مضاعف فاصله باین دو نقطه

۱۵- چون از نقطه مفروضه دو خط رسم کنیم که قاطع دایره شوند و بر هر یک یک مجموع دو وتر
دو وتر مقداری شود ثابت

۱۶- چون دایره دو بدو متقاطع شوند و وتر فصل مشترک آنها بر یک نقطه متقاطع شوند



۱۷- چون از نقطه اوسط قوس اب د دو قاطع اراد

واطه را رسم کنیم چهار نقطه د و د و ط و ه بر محیط

دایره واقع شوند

۱۸- چون سه دایره هم دیکر را در دو نقطه متقاطع کنند