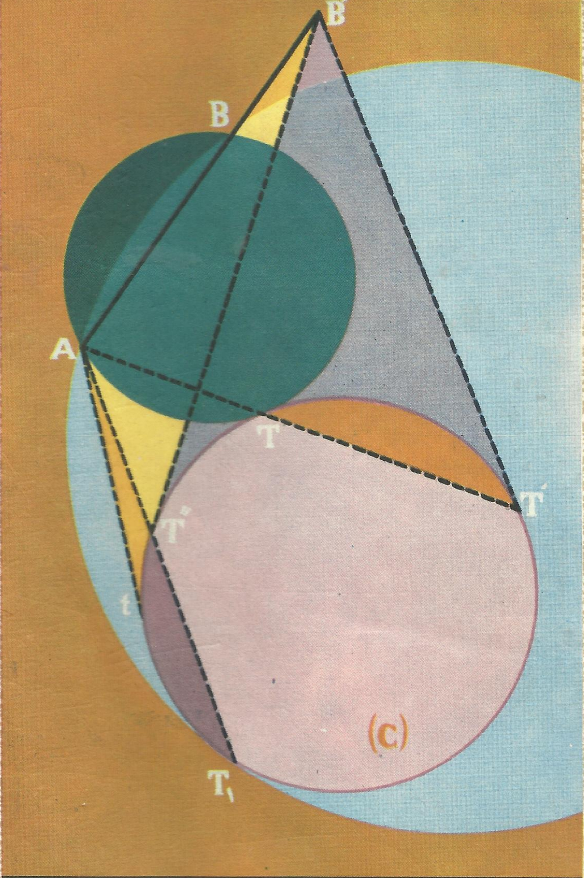


هندسه و مخروطات

برای سال ششم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

این کتاب که به وسیلهٔ آقایان : موسی آذرنوش، احمد بیرشك، جهانگیر شمس آوری ، عبدالغنی علیم مروستی، پروفسور تقی فاطمی، باقر نحوی، شادروان محسن هنربخش نگارش یافته برطبق مادهٔ ۳ قانون کتابهای درسی و اساسنامهٔ سازمان کتابهای درسی ایران برای تدریس دردبیرستانها برگزیده شده است.

چاپ از : موسوی

فهرست مندرجات

بخش اول

هندسه

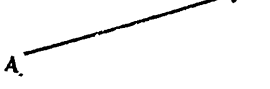
به نام خدا

فصل اول

بردارها

الف ـ کلیات

۱ـ تعریفها ـ یك متحرك می‌تواند هر قطعه خطی مانند **AB** را در دوجهت مختلف (از **A** به طرف **B** یا از **B** به طرف **A**) بپیماید ؛ اگر فرض‌کنیم‌که جهت حرکت از **A** به طرف **B** باشد ، در این صورت قطعه‌خط **AB** را،که روی آن جهت‌اختیار شده ، **بردار AB** یا **حامل AB** می‌خوانند و چنین می‌نویسند : $\overrightarrow{AB}$. در روی شکل نیز جهت را به وسیلهٔ علامت تیری که در **B** می‌گذارند ، نمایش می‌دهند ؛ اینطور :



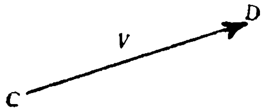
A **مبدأ** بردار **AB** و **B** **منتهای** آن نامیده می‌شود .

اگربعکس، جهتی‌که روی قطعه‌خط **AB** گرفته می‌شود،از**B** به **A** باشد ، با این قطعه‌خط جهت‌دار ، بردار **BA** مشخص می‌شودکه آن را $\overrightarrow{BA}$می‌نویسند و اینطور نمایش می‌دهند :

مبدأ این بردار ، B و منتهای آن ، A است .

بردار ، قطعه‌خطی است‌که روی‌آن ، جهت اختیار شده باشد (یا قطعه‌خطی است جهت‌دار) . از دو سر قطعه خط ، آن را که حرکت از آنجا شروع می‌شود ، مبدأ بردار و سردیگر را منتهای بردار می‌نامیم . بردار را با دوحرف مبدأ ومنتهای آن ، یا در جایی‌که اشتباهی نشود ، فقط با یك حرف می‌خوانند ومی‌نویسند. درخواندن با دو حرف ، همیشه باید اول حرف مبدأ را تلفظ کرد و در نوشتن باید حرف مبدأ را طرف چپ حرف منتهی نوشت وبالای آنها این علامت : $\longrightarrow$ را گذاشت .

مثلاً این بردار را چنین



می‌خوانیم : بردار CD یا بردار v و می‌نویسیم $\overrightarrow{CD}$ یا $\overrightarrow{v}$.

اندازه یا **قدرمطلق** یا **طول** یك‌بردار ، مانند $\overrightarrow{AB}$،طول‌قطعه‌خط AB است .

راستای بردار ، راستای هرخطی‌است‌که موازی بردار رسم شود. بخصوص ، یکی ازاین خطوط، همان‌است‌که ازامتداد دادن بردار بدست می‌آید؛ این خطراکه بردار روی‌آن‌جا دارد،**محمل** آن بردارمی‌نامند.

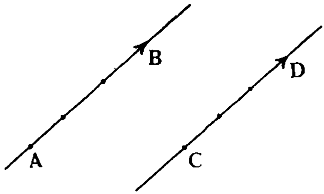
برای مشخص شدن یك بردار ، کافی است‌که :

یا مبدأ و منتهای آن معلوم باشد ؛

یا مبدأ و راستا و جهت و طول آن معلوم باشد .

دو بردار متوازی و هم‌طول و هم‌جهت را **همسنگ** می‌نامند ؛ مانند $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ در شکل ۱ و می‌توان نوشت :

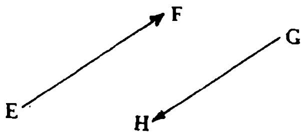
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$



شکل ۱

دو بردار همسنگ را که یك محمل داشته باشند ، **هم‌ارز** می‌گویند .

دو بردار هم طول و دارای یك محمل اما در جهت مختلف را **مستقیماً متقابل** می‌خوانند .



شکل ۲

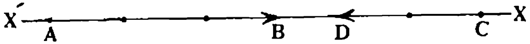
دو بردار هم طول ومتوازی ومختلف‌الجهت واقع بر دو محمل متمایز، یك **زوج** تشکیل‌می‌دهند و آنها را **متقابل** می‌گویند ؛ مانند $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{GH}$ در شکل ۲ و می‌توان نوشت :

$$\overrightarrow{GH}=-\overrightarrow{EF}$$

۲ـ اندازهٔ جبری یك بردار ـ اگر محوری مانند $x'x$ موازی بردار اختیارکنیم (این محور ممکن است منطبق برمحمل بردارباشد) ، اندازهٔ جبری بردار بر روی محور ، عددی است مثبت یا منفی که قدر مطلقش برابر قدر مطلق بردار و علامتش + یا − است بنابر آنکه

جهت بردار با جهت محور متحد یا مختلف باشد .

مثلاً در شکل ۳ ، دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نمایش داده شده‌اند که



شکل ۳

دارای یك محملند ؛ جهت $\overrightarrow{AB}$ ازچپ به راست وطولش۳ است وجهت $\overrightarrow{CD}$ از راست به چپ و طول آن ۲ است ؛ پس اگرجهت مثبت محور از چپ به راست اختیارشده باشد ، اندازهٔ جبری اولی ۳+ واندازهٔ جبری دومی ۲− خواهد بود . اندازهٔ جبری $\overrightarrow{AB}$ را با علامت قراردادی $\overline{AB}$ نشان می‌دهند ؛ با این قرارداد وبا فرض اینکه جهت مثبت محورازچپ به راست‌گرفته شود ، می‌توان نوشت : $\overline{AB}=+3$ و $\overline{CD}=-2$.

۳ ـ موارد استعمال بردارها ـ بردارها برای نمایش کمیّات فیزیکی و مکانیکی ، مانند سرعت و نیرو ، بکار می‌روند .

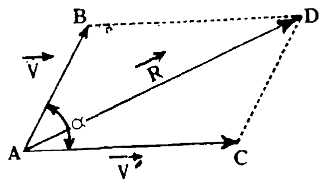
ب ـ جمع و تفریق بردارها

۴ ـ مجموع هندسی دو بردار هم مبدأ ـ مجموع هندسی دو بردارهم‌مبدأ AB و AC ، بردار AD است‌که مبدأش A ، مبدأ مشترك دو بردار ، و منتهایش D منتهای برداری باشدکه از انتهای یکی از دو بردار ، همسنگ دیگری‌کشیده شود (شکل ۴) . بطور قرارداد چنین می‌نویسیم :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

یا :
$$\overrightarrow{R}=\overrightarrow{V}+\overrightarrow{V'}$$

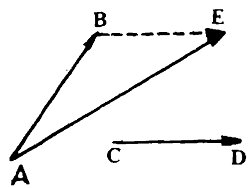
مجموع هندسی دو بردار هم مبدأ را **برآیند** یا **منتجهٔ** آنها می‌نامند. پس درشکل ۴ ، $\overrightarrow{R}$ یا $\overrightarrow{AD}$ **برآیند** یا **منتجهٔ** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است . هریك از دو بردار AB و AC ، یك **مؤلفهٔ** $\overrightarrow{AD}$ نامیده می‌شود .



شکل ۴

بطوری که در شکل ۴ بوضوح دیده می‌شود ، هرگاه با دو بردار هم‌مبدأ AB و AC متوازی‌الاضلاع ABDC را بسازیم ، برآیند آن دو بردار، $\overrightarrow{AD}$ است‌که مبدأ آن A ، مبدأ مشترك دو بردار مفروض ، و منتهایش، سر دیگر قطری ازمتوازی‌الاضلاع است‌که از A می‌گذرد . پس **برآیند دو بردار ، بستگی به آن ندارد که از منتهای کدامیك ، برداری همسنگ دیگری رسم کنیم .**

۵- مجموع هندسی دو بردار که یك مبدأ ندارند - برای تعیین مجموع هندسی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ (شکل ۵)، از منتهای یکی ، مثلاً از منتهای $\overrightarrow{AB}$، برداری مانند $\overrightarrow{BE}$ همسنگ دیگری رسم می‌کنیم ؛ بردار AE مجموع هندسی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است .

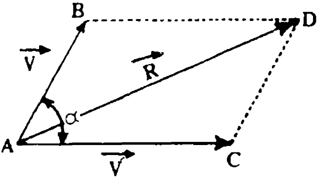


شکل ۵

می‌توان گفت‌که مجموع هندسی دو بردار ، برابر است با برآیند

دو بردار همسنگ آنها که از یك نقطهٔ غیرمشخص رسم شوند .

۶ ـ اندازهٔ برآیند دو بردار ـ



شکل ۶

هرگاه $\vec{R}$ برآیند $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ و α زاویهٔ بین این دو بردار باشد (شکل ۶) ، در مثلث ABD داریم :

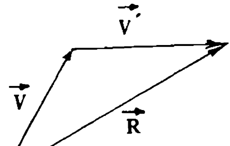
$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\widehat{ABD} \\ &= AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos(180^\circ-\alpha) \\ &= AB^2+BD^2+2AB\cdot BD\cdot\cos\alpha \end{aligned}$$

یعنی :

$$\boxed{R^2=V^2+V'^2+2V\cdot V'\cdot\cos(\widehat{\vec{V},\vec{V'}})}$$

در این تساوی ، R و V و V' نمایش طولهای $\vec{R}$ و $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ ، و $(\widehat{\vec{V},\vec{V'}})$ نمایش زاویهٔ بین $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ است .

۷ـ تفاضل هندسی دو بردار ـ هرگاه $\vec{R}$ برآیند $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ باشد (شکل ۷) ، به‌موجب تعریف تفریق ، می‌توان گفت که $\vec{V'}$ تفاضل هندسی $\vec{R}$ و $\vec{V}$ است و چنین نوشت :



شکل ۷

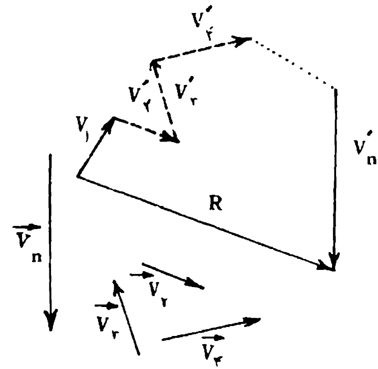
$$\vec{V'}=\vec{R}-\vec{V}$$

پس : **تفاضل هندسی دو بردار هم مبدأ ، برداری است که مبدأ آن ، منتهای بردار مفروق ، و منتهای آن ، منتهای بردار مفروق‌منه است .**

(اگر دو بردار ، هم مبدأ نباشند و بخواهیم تفاضل هندسی آنها را

بدست آوریم ، از یك نقطه دو بردار همسنگ آنها رسم می‌کنیم و تفاضل هندسی را به ترتیب فوق بدست می‌آوریم .)

۸ - مجموع هندسی چند بردار - برای تعیین مجموع هندسی بردارهای V_1، V_2، V_3، ...و V_n ، از انتهای یکی ، مثلاً از انتهای $\vec{V_1}$ (شکل ۸) ، $\vec{V'_2}$ را همسنگ $\vec{V_2}$ و از انتهای $\vec{V'_2}$ ، $\vec{V'_3}$ را همسنگ $\vec{V_3}$ رسم می‌کنیم و به همین ترتیب عمل را ادامه می‌دهیم تا همسنگهای همهٔ بردارها رسم شوند ؛ برداری که مبدأ آن ، مبدأ اولین بردار ، ومنتهای آن ، منتهای آخرین برداری است که رسم کرده‌ایم ، **مجموع هندسی** بردارهای مفروض است و اگر آن را به $\vec{R}$ بنمایانیم ، می‌توانیم بنویسیم :



شکل ۸

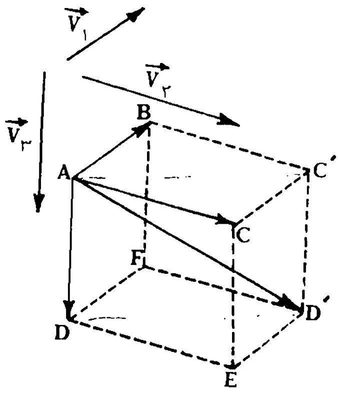
$$\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \ldots\ldots + \vec{V_n}$$

اگر بردارها هم مبدأ باشند ، مجموع هندسی آنها ، که از مبدأ مشترك می‌گذرد ، **برآیند** یا **منتجهٔ** آن بردارها نامیده می‌شود .

در جمع هندسی بردارها ، همواره می‌توان به جای چند بردار ، مجموع هندسی آنها را قرار داد .

مجموع هندسی چند بردار ، بستگی به ترتیب رسم همسنگهای آنها ندارد (چرا ؟) .

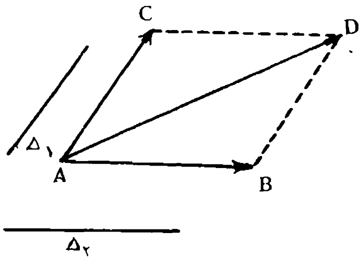
۹- مجموع هندسی سه بردار غیر موازی با یك صفحه- هرگاه $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ (شکل۹) موازی با یك صفحه نباشند و $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ همسنگهای آنها را رسم کرده $\overrightarrow{AD'}$ برآیند آنها را بدست آوریم ، می‌بینیم که AD' قطر متوازی‌السطوح $ABFDCC'D'E$ است که AB ، AC و AD سه یال مجاور آن‌هستند.



شکل ۹

پس : مجموع هندسی سه بردار غیر موازی با یك صفحه ، قطر متوازی‌السطوحی است که سه یال مجاورش همسنگهای آن سه بردار باشند .

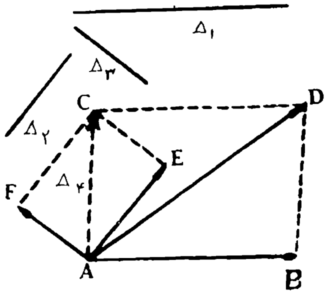
۱۰ - تجزیهٔ بردار به چند مؤلفه - اولاً- هرگاه $\overrightarrow{AD}$ و دوخط Δ_1 و Δ_2 موازی یك صفحه باشند (شکل ۱۰) وبخواهیم $\overrightarrow{AD}$ را به دو بردار به امتدادهای Δ_1 و Δ_2 تجزیه‌کنیم ، یعنی دوبردار موازی با Δ_1 و Δ_2 چنان بدست آوریم



شکل ۱۰

که $\overrightarrow{AD}$ مجموع هندسی آنها باشد ، از A و D چهار خط موازی با Δ_1 و Δ_2 می‌کشیم تا ازتقاطع آنها متوازی‌الاضلاع ABDC بدست‌آید ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مؤلفه‌های $\overrightarrow{AD}$ هستند .

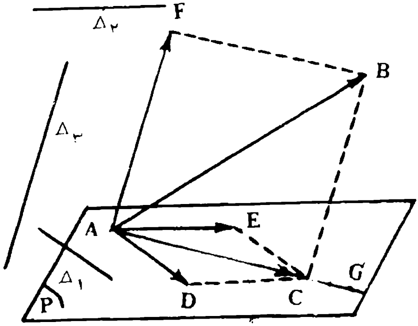
ثانیاً ـ سه خط Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 را با $\overrightarrow{AD}$ در یك صفحه در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱)، یافرض می‌کنیم سه‌خط مذکور درصفحه‌ای موازی $\overrightarrow{AD}$ قرار داشته باشند و



شکل ۱۱

بخواهیم $\overrightarrow{AD}$ را به سه مؤلفهٔ موازی با امتدادهای Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 تجزیه کنیم ؛ نخست $\overrightarrow{AD}$ را به دو مؤلفهٔ موازی با Δ_1 و امتداد دلخواه Δ_4 ، واقع در صفحهٔ آن سه امتداد ، تجزیه می‌کنیم ؛ سپس مؤلفهٔ واقع بر Δ_4 را به دو مؤلفهٔ دیگر موازی با Δ_2 و Δ_3 تجزیه می‌کنیم . دیده می‌شود که این مسئله جوابهای بیشمار دارد .

ثالثاً ـ هرگاه بخواهیم $\overrightarrow{AB}$ را به سه مؤلفهٔ موازی با امتدادهای Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 ، غیر واقع در یك صفحه ، تجزیه کنیم (شکل ۱۲) ، از A سه خط AD ، AE و AF را بترتیب موازی Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 رسم می‌کنیم ؛ ازدوخط اول ، صفحهٔ P بوجود می‌آیدکه فصل مشترك آن با صفحهٔ ABF را AG می‌نامیم ؛ بعد $\overrightarrow{AB}$ را در صفحهٔ ABF به دو بردار تجزیه می‌کنیم که یکی $\overrightarrow{AF}$ ودیگری $\overrightarrow{AC}$ درامتداد



شکل ۱۲

AG باشد . سپس $\overrightarrow{AC}$ ، یعنی مؤلفهٔ واقع در صفحهٔ P ، را به دومؤلفهٔ $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ تجزیه می‌کنیم ؛ $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF}$ بترتیب مؤلفه‌های $\overrightarrow{AB}$ به موازات Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 می‌باشند .

یادآوری ـ در شکل ۱۲ ، بردار AC تصویر بردار AB به موازات امتداد Δ_3 بر صفحهٔ P است .

ج ـ تصویر بردارها

۱۱ ـ قضیهٔ شال[1] ـ هرگاه سه‌نقطهٔ A ، B و C ، به هر وضع ، بر یك محور باشند ، بین اندازه‌های جبری بردارهای AB ، BC و CA همواره این رابطه برقرار است :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

برهان ـ قبلاً یادآوری می‌کنیم که اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ دو بردار باشند که مبدأ هر یك بر منتهای دیگری منطبق باشد ، داریم :

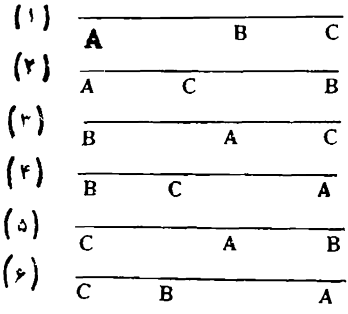
$$\overline{AB}+\overline{BA}=0$$

زیراکه این‌دو بردار، دارای یك‌محمل و از حیث قدرمطلق متساوی اما از حیث جهت مختلفند، پس اندازه‌های جبری آنها دو عدد قرینه‌اند ($\overline{BA}=-\overline{AB}$) و مجموع دو عدد قرینه صفر است .

حال برحسب‌اوضاع‌مختلف A ، B و C یکی‌ازشش‌صورت‌شکل۱۳ بوجود می‌آید و در هریك ازصورتهای ششگانه می‌توان سه‌بردارمتحد ـ الجهت بقسمی پیداکردکه ازمیان آن سه بردار ، قدر مطلق یکی‌مساوی

۱ـ Chasles

مجموع مقادیر مطلق دو بردار دیگر بوده و در نتیجه مقدار جبری آن نیز مساوی مجموع مقادیر جبری دو بردار دیگر باشد : مثلاً در سومین صورت شکل ۱۳ :



شکل ۱۳

$$\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$$

در این تساوی ، $\overline{BA}$ و $\overline{AC}$ را که به طرف اول ببریم ، چنین خواهیم داشت :

$$\overline{BC}-\overline{BA}-\overline{AC}=0$$

و اگر به جای $-\overline{BA}$ و $-\overline{AC}$ بترتیب مقدار مساوی آنها $+\overline{AB}$ و $+\overline{CA}$ را بگذاریم ، حاصل می‌شود :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

همچنین در چهارمین صورت شکل ۱۳ :

$$\overline{BA}=\overline{BC}+\overline{CA}$$

یا :

$$0=-\overline{BA}+\overline{BC}+\overline{CA}$$

که چون به‌جای $-\overline{BA}$ مقدار مساوی آن $+\overline{AB}$ را قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

۱۲- تعمیم قضیهٔ شال - هرگاه n نقطه A ، B ، C ، ..... ، M و N ، به هر وضع ، بر یک محور باشند ، بین اندازه‌های جبری بردارهای

AB و BC و CD و .... و MN و NA این رابطه برقرار است :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+CD+\ .\ .\ .\ .\ +\overline{MN}+\overline{NA}=0$$

برهان - نخست ، با صرف نظر از نقاط دیگر ، فقط سه نقطهٔ A ،

شکل ۱۴

B و C (شکل ۱۴) را در نظر می‌گیریم ؛ به موجب قضیهٔ شال داریم :

$$(1)\qquad \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

همچنین اگر فقط نقاط A ، C و D را در نظر بگیریم ، این رابطه برقرار است :

$$(2)\qquad \overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DA}=0$$

و بین A ، D و E :

$$(3)\qquad \overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EA}=0$$

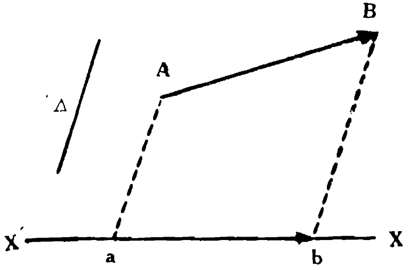
و بتدریج بعد از نوشتن هر رابطه ، از نقطهٔ دوم صرف نظر می‌کنیم و با در نظر گرفتن نقطهٔ بعدی رابطهٔ دیگری می‌نویسیم تا وقتی که به نقطهٔ N برسیم و رابطهٔ :

$$(n)\qquad \overline{AM}+\overline{MN}+\overline{NA}=0$$

را بنویسیم ؛ حال ، این n رابطه را که با هم جمع کنیم و اعداد قرینه ، نظیر ($\overline{AC}$ و $\overline{CA}$) ، ($\overline{AD}$ و $\overline{DA}$) ، . . . . و ($\overline{AM}$ و $\overline{MA}$) را حذف کنیم ، رابطهٔ زیر که همان رابطهٔ مطلوب است ، بدست می‌آید :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\ .\ .\ .\ +\overline{MN}+\overline{NA}=0$$

۱۳ ـ تعریف ـ فرض می‌کنیم بردار AB و محور $x'x$ در یك صفحه مانند P واقع باشند و Δ امتدادی موازی با صفحهٔ P (یا منطبق بر آن) باشد (شکل ۱۵) ؛



شکل ۱۵

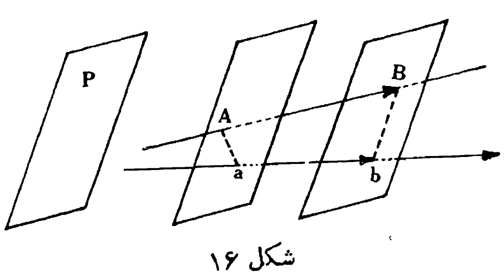
برای اینکه تصویر $\overrightarrow{AB}$ را به موازات امتداد Δ بر محور $x'x$ بدست آوریم ، از A و B ، مبدأ و منتهای بردار ، دو خط به موازات Δ رسم می‌کنیم تا محور را در a و b قطع کنند ؛ $\overline{ab}$ ، یعنی اندازهٔ جبری $\overrightarrow{ab}$ بر روی محور ، تصویر $\overrightarrow{AB}$ است .

تصویر یك بردار بر یك محور ، عددی است جبری .

اگر Δ بر محور عمود باشد ، تصویر را **تصویر قائم** می‌گوییم .

چون در این کتاب فقط با تصویر قائم سروکار داریم ، هرجا بطور مطلق کلمهٔ **تصویر** بکار رود ، مراد **تصویر قائم** است .

برای آنکه برداری مانند $\overrightarrow{AB}$ را به موازات صفحهٔ P برمحوری غیر موازی با صفحهٔ P تصویر کنیم (شکل ۱۶) ، از مبدأ و منتهای بردار ، دو صفحه به موازات P می‌گذرانیم تا محور را در a و b قطع کنند؛ $\overline{ab}$ تصویر $\overrightarrow{AB}$ است .



شکل ۱۶

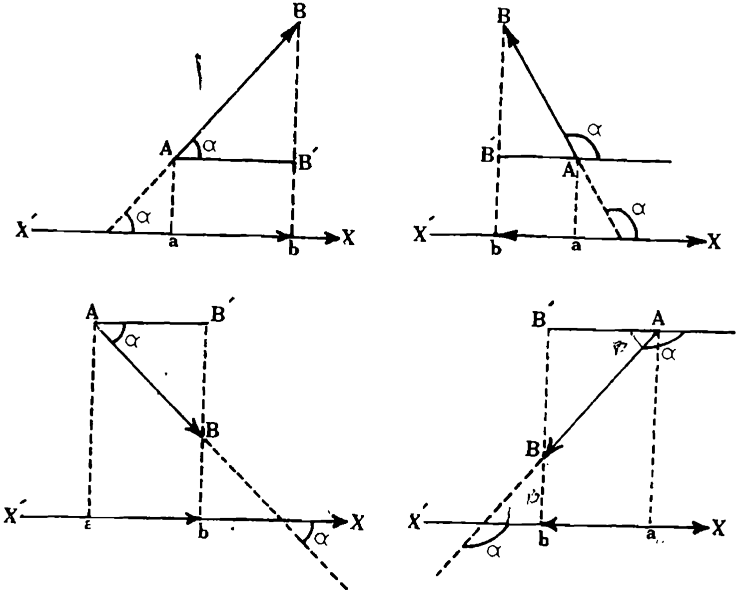
برحسب آنکه صفحهٔ P عمود برمحور یا نسبت به آن مایل باشد ، این تصویر هم **قائم** یا **مایل** نامیده می‌شود .

۱۴-قضیه - تصویر هر بردار بر یك محور برابر است با حاصل - ضرب اندازهٔ آن بردار در کسینوس زاویهٔ بین جهت مثبت بردار و جهت مثبت محور .

برهان- $\overline{ab}$ تصویر $\overrightarrow{AB}$ را بدست می‌آوریم و زاویهٔ بین جهت مثبت بردار و جهت مثبت محور را α می‌نامیم (شکل ۱۷) ؛ هرگاه از A خطی موازی محور رسم‌کنیم تا Bb را در B' قطع‌کند، بدیهی است‌که $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{ab}$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABB' : $AB'=AB.\cos\widehat{BAB'}$.

$\widehat{BAB'}$ بر حسب امتدادهای مثبت بردار و محور، همانطورکه درشکل



شکل ۱۷

می‌بینید ، ممکن است مساوی α یا مکمل آن باشد .

هر گاه α حاده باشد، $\overrightarrow{AB'}$ یعنی $\overrightarrow{ab}$، درجهت مثبت است و داریم:

$$\overline{AB'}=\overline{ab}=AB.\cos\alpha$$

و اگر α منفرجه باشد ، $\overrightarrow{AB'}$ یعنی $\overrightarrow{ab}$ ، در جهت منفی است و داریم :

$$\overline{AB'}=\overline{ab}=-AB.\cos(180^\circ-\alpha)=AB.\cos\alpha$$

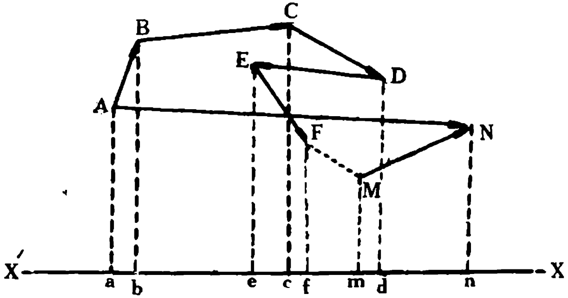
پس در هر حال : $\overline{ab}=AB.\cos\alpha$

نتیجه ـ تصویر $\overrightarrow{V_1}$ بر بردار دیگر $\overrightarrow{V_2}$ (یعنی برمحوری که بر $\overrightarrow{V_2}$ منطبق و با آن هم‌جهت باشد) ، مساوی است با $V_1\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$.

۱۵ـ قضیه ـ تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یك محور، مساوی است با مجموع جبری تصویرهای آن بردارها .

برهان ـ $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، . . . . و $\overrightarrow{MN}$ مفروضند و برآیند آنها $\overrightarrow{AN}$ است (شکل ۱۸) ؛ نقاط A ، B ، C ، .... ، M و N را برمحور $x'x$ تصویر می‌کنیم ؛ به موجب رابطهٔ شال :

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\dots+\overline{mn}+\overline{na}=0$$



شکل ۱۸

یا : $\overline{an}=\overline{ab}+\overline{bc}+\cdots+\overline{mn}$

یعنی : تصویر $\overrightarrow{AN}=$ تصویر $\overrightarrow{AB}+$ تصویر $\overrightarrow{BC}+\ldots+$ تصویر $\overrightarrow{MN}$

د ـ حاصل‌ضرب اسکالر[1] دو بردار

۱۶ ـ ضرب بردار در یك عدد ـ حاصل ضرب یك بردار$(\overrightarrow{V})$ دریك عدد مثبت (m) ، برداری است به همان‌امتداد وجهت‌که‌اندازه‌اش حاصل‌ضرب اندازهٔ آن بردار در آن عدد باشد . این حاصل ضرب را به $\overrightarrow{mV}$ نمایش می‌دهیم .

اگر m منفی باشد ، $\overrightarrow{mV}$ برداری است موازی $\overrightarrow{V}$ که جهتش مخالف جهت $\overrightarrow{V}$و قدرمطلقش برابر حاصل‌ضرب قدرمطلق m در اندازهٔ $\overrightarrow{V}$ است .

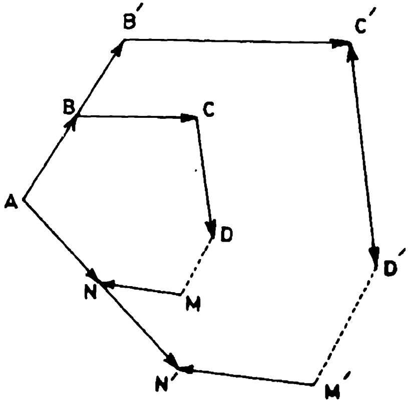
۱۷ـقضیه ـ اگرچند بردار را درعددی ضرب‌کنیم، مجموع هندسی آنها هم درآن عدد ضرب می‌شود .

برهان ـ اگر$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$،...و $\overrightarrow{MN}$ چند بردار و$\overrightarrow{AN}$ مجموع هندسی آنها باشد (شکل ۱۹) و آنها را در عدد مثبت m ضرب کنیم تا بردارهای $\overrightarrow{AB'}$ ، $\overrightarrow{B'C'}$ ،... و $\overrightarrow{M'N'}$بدست آیند و $\overrightarrow{AN'}$برآیند آنها باشد ، دو چندضلعی $ABC\ldots MN$ و $AB'C'\ldots M'N'$ که اضلاعشان نظیر بنظیر متناسب (نسبت اضلاع m است) و زوایایشان‌نظیر بنظیر متساویند ، متشابهند ؛ بنابراین :

۱ـ Scalaire

$$\overrightarrow{AN'} = m\overrightarrow{AN}$$

درحالتی که m منفی است ، رسم شکل و اثبات قضیه را به‌عهدهٔ دانش‌آموزان می‌گذاریم .



شکل ۱۹

(۱۸ ـ حاصل ضرب اسکالر (یا درونی) $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ عبارت است از عدد $V_1 . V_2 cos(\widehat{V_1, V_2})$ که آن را چنین نمایش می‌دهیم :

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = V_1 . V_2 . cos(\widehat{V_1, V_2})$$

چون اندازه‌های V_1 و V_2 دوعددمثبتند، علامت‌حاصل‌ضرب‌اسکالر دوبردار، بستگی به علامت $cos(\widehat{V_1, V_2})$ دارد . اگر دو بردار برهم عمود باشند ، حاصل ضرب اسکالرآنها صفر است . (چرا ؟)

چون $V_2 cos(\widehat{V_1, V_2})$ برابراست با تصویر $\overrightarrow{V_2}$ بر $\overrightarrow{V_1}$ (نتیجهٔ قضیهٔ شمارهٔ ۱۴) ، حاصل ضرب اسکالردو بردار را می‌توان چنین تعریف‌کرد:
حاصل‌ضرب اسکالردو بردار عبارت است از حاصل‌ضرب اندازهٔ یکی ازآنها در تصویر دیگری بر روی آن .)

تمرین

۱ـ چرا اگر دو بردار همسنگ باشند ، دو پاره‌خط که مبدأ یکی را به منتهای دیگری وصل می‌کنند ، منصف یکدیگرند ؟

۲ـ برای چند بردارمفروض می‌توان مجموعهای هندسی بیشمار بدست

آورد ؛ چرا همهٔ این برآیندها با یکدیگر همسنگند ؟

۳- شرط آنکه برآیند سه بردار مساوی صفر باشد، چیست ؟

۴- برآیند $\overrightarrow{V_1}$ ، $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ راکه دوبدو برهم عمودند ، بدست آورید.

۵- اندازه‌های دو بردار و مجموع هندسی آنها در دست است ؛ زاویهٔ بین آن دو بردار را حساب‌کنید .

۶ - برآیند سه بردار به اندازه‌های ۷ ، ۵ و ۳ مساوی صفر است ؛ زاویه‌های بین این بردارها چیست ؟

۷- برداری را به دوبردار دیگرچنان تجزیه‌کنیدکه مجموع مربعهای اندازه‌های آنها s^2 و زاویهٔ بینشان α باشد .

۸- برداری‌را به دوبردار دیگر تجزیه‌کنیدکه تفاضل مربعهای‌اندازه‌های آنها d^2 و زاویهٔ بینشان α باشد .

۹ - برآیند سه بردار به اندازه‌های $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5-\sqrt{6}}$ صفر است ؛ زاویه‌های بین بردارها را بدست آورید .

۱۰- مبدأهای سه بردار نقطهٔ H ، محل تلاقی ارتفاعهای‌مثلث ABC ، امتدادهایشان HA ، HB و HC . جهتهایشان متوجه A ، B و C ، اندازه‌هایشان $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ است ؛ برآیند آنها را بدست آورید .

۱۱- مطلوب است برآیند سه بردارکه مبدأ آنها مرکز دایرهٔ محیطی یك مثلث و منتهایشان رئوس آن مثلث باشد .

۱۲- بر وسط هرضلع یك مثلث خطی عمود می‌کنیم و در طرف خارج برروی آن به اندازهٔ همان ضلع جدا می‌کنیم ؛ ثابت‌کنیدکه برآیند سه‌برداری که به این ترتیب بدست می‌آیند ، صفر است .

۱۳- ثابت‌کنیدکه برآیند سه‌بردارکه مبدأآنها نقطهٔ ثابتOومنتهایشان رئوس مثلث ABC باشد، همواره بر G (مرکز ثقل مثلث) می‌گذرد واندازه‌اش مساوی است با ۳OG .

۱۴- مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC مفروض است ؛ نقاط D و E وتر BC را به سه جزء متساوی تقسیم می‌کنند ؛ مطلوب است محاسبهٔ مجموع هندسی

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ و نیز تعیین طول و زاویه‌های این مجموع با $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

۱۵- شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است ؛ مطلوب است مجموع هندسی $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}$.

۱۶- مربع ABCD و نقطهٔ E وسط BC و نقطهٔ F وسط CD مفروض است ؛ مطلوب است مجموع هندسی $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{FA}$ و $\overrightarrow{DA}$.

۱۷- $\widehat{xOy}=۱۲۰^\circ$ و Oz نیمساز آن داده شده است ؛ سه بردار $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را بترتیب به اندازه‌های $V\cos\alpha$ ، $V(\cos\alpha-\sqrt{۳}\sin\alpha)$ و $V(\cos\alpha+\sqrt{۳}\sin\alpha)$ بر Oz ، Ox و Oy رسم می‌کنیم (V و α دو مقدار ثابتند) ؛ برآیند این سه‌بردار و زاویهٔ آن را با هریك از سه امتداد مذکور بدست آورید .

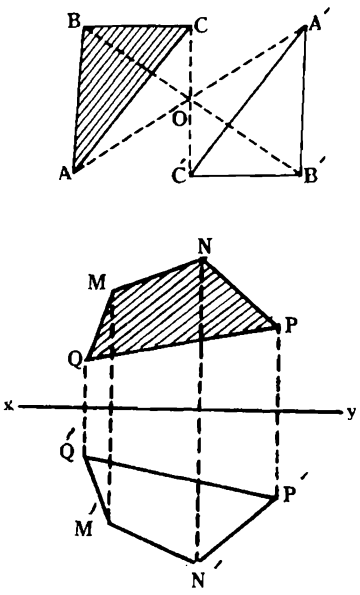
فصل دوم

تغییر مکان

الف ـ کلیات

۱ـ تبدیل ـ هرگاه ازیك شکل هندسی یك شکل هندسی دیگر، برطبق قاعدهٔ معینی ، نتیجه شود، می‌گوییم‌که **شکل اول را به شکل دوم تبدیل کرده‌ایم** ، و شکل دوم را **تبدیل‌یافتهٔ** شکل اول می‌نامیم.

مثلاً در شکل ۱ ، مثلث $A'B'C'$ تبدیل‌یافتهٔ مثلث ABC ، برطبق قاعدهٔ تقارن مرکزی ، و $M'N'P'Q'$ تبدیل‌یافتهٔ $MNPQ$ ، برطبق قاعدهٔ تقارن محوری است .



شکل ۱

هردوجزء از دو شکل را ، مانند AB و $A'B'$ یا $\widehat{MNP}$ و $\widehat{M'N'P'}$ ، که یکی تبدیل یافتهٔ دیگری باشد ، **دوجزء متناظر** می‌نامیم .

تبدیلها انواع مختلف دارند ؛ در برخی از آنها شکل تغییر نمی‌کند، یعنی وضع اجزای آن نسبت به یکدیگر و همچنین اندازه‌های اجزای شکل پس از تبدیل محفوظ می‌مانند، مانند تقارن مرکزی . در بعضی از تبدیلها پاره‌ای از اجزای متناظر، ممکن است کوچکتر یا بزرگتر شوند و گاهی شکل بکلی تغییر کند .

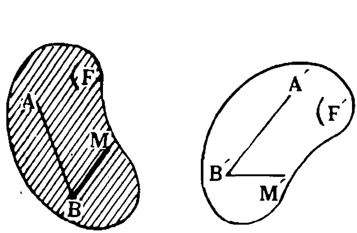
تجانس ،قطب و قطبی و انعکاس که بعداً خواهیم دید ، از این نوع تبدیلها هستند .

تغییرمکان ، تبدیلی است که در آن ، شکل تغییر نمی‌کند .

تغییرمکان شکل مستوی ممکن است در صفحهٔ آن شکل یا در فضا صورت پذیرد . در اینجا تغییر مکان یك شکل مستوی را در صفحهٔ آن شکل مطالعه می‌کنیم و می‌گوییم که **شکل در صفحهٔ خود می‌لغزد .**

۲ـقضیه ـ در تغییرمکان شکل در صفحهٔ خود ، شناختن وضع جدید دو نقطهٔ شکل برای مشخص ساختن وضع جدید آن شکل کافی است .

برهان ـ در حقیقت اگر A' و B' وضع جدید دو نقطهٔ A و B از شکل F باشد (شکل ۲) ، M' وضع جدید هر نقطهٔ دیگر مانند M مشخص است ؛ زیرا که چون شکل تغییر ناپذیر است :



شکل ۲

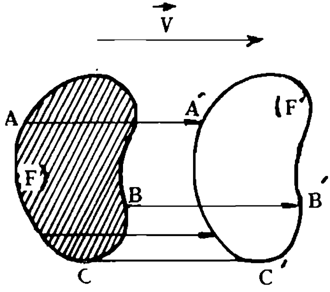
$$\widehat{A'B'M'} = \widehat{ABM}$$

یعنی مقدار و جهت زاویهٔ $A'B'M'$ معلوم است و ازاینجا امتداد $B'M'$ معین می‌شود ؛ وچون $B'M' = BM$ ، وضع M' کاملاً مشخص می‌شود.

پس وضع هر نقطه از شکل F'، ودر نتیجه وضع خود آن شکل ،مشخص است .

ب ـ انتقال

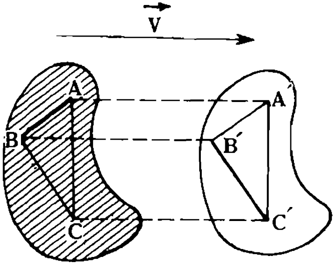
۳ـتعریف ـ هرگاه برداری مانند $\overrightarrow{V}$ داده شده باشد و از هر نقطهٔ شکل F ، مانند A ، بردار AA' را همسنگ $\overrightarrow{V}$ رسم کنیم (شکل ۳) ، انتهای این بردارها شکلی مانند F' بوجود می‌آورند؛ در این حال می‌گوییم که F' از انتقال F به اندازهٔ $\overrightarrow{V}$ حاصل شده است . $\overrightarrow{V}$ را **بردارانتقال** می‌نامند .



شکل ۳

۴ـقضیه‌ـ انتقال ، شکل را تغییر نمی‌دهد ؛ یعنی تغییرمکان است.

برهان‌ـ اگر A ، B و C سه نقطهٔ غیر مشخص از شکل F و A' ، B' و C' وضعهای جدید آنها پس از انتقال به اندازهٔ $\overrightarrow{V}$ باشند (شکل۴) ،دومثلث $A'B'C'$ و ABC متساویند ؛ به‌دلیل آنکه:



شکل ۴

در متوازی‌الاضلاع $AA'B'B$: $A'B' \underline{\underline{\parallel}} AB$

و نیز : $B'C' \underline{\underline{\parallel}} BC$

پس : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ (به چه دلیل ؟)

یعنی : $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$

بنابراین، اگر $A'B'$ را بلغزانیم تا بر AB منطبق شود ، C' نیز بر C منطبق خواهد شد؛ و به همین ترتیب، هر یك از نقاط شکل F' بر نقطهٔ نظیرش از شکل F منطبق می‌شود ؛ پس دو شکل F' و F متساویند .

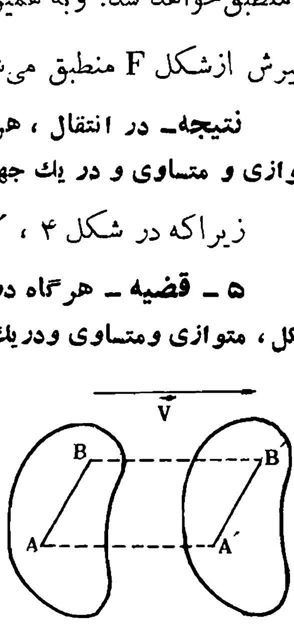
نتیجه- در انتقال ، هر دو پاره‌خط متناظر مانند $A'B'$ و AB، متوازی و متساوی و در یك جهتند .

زیرا که در شکل ۴ ، $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است .

۵ - قضیه - هرگاه در تغییر مکانی هر دو پاره‌خط متناظر از دو شکل ، متوازی و متساوی و در یك جهت باشند، آن تغییر مکان ، یك انتقال است.

برهان- اگر $A'B'$ (شکل ۵) و AB متوازی و متساوی و در یك جهت باشند ، شکل $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است ؛ پس :

$\overrightarrow{AA'} \parallel$ و $= \overrightarrow{BB'}$



شکل ۵

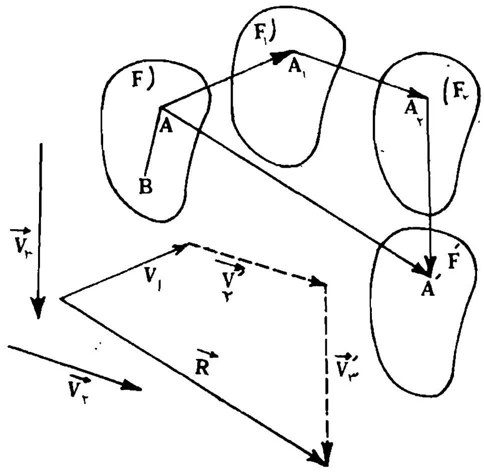
یعنی تمام نقاط شکل ، به اندازهٔ $\overrightarrow{V}$ که همسنگ با $\overrightarrow{AA'}$ رسم شده است ، تغییر مکان داده‌اند ، یا به عبارت دیگر، انتقال یافته‌اند .

۶- ترکیب انتقالها- ممکن است شکلی را از وضع اول ...

یا چند بار پی در پی انتقال دهیم تا به وضع نهایی F' برسد ؛ چون انتقال تغییرمکان است ، شکل F' برابر شکل F است و می‌توان با یك انتقال شکل F را به شکل F' تبدیل‌کرد؛ در این صورت، می‌گوییم این انتقال از ترکیب‌کردن آن چند انتقال نتیجه می‌شود .

۷- قضیه- تغییرمکانی‌که از چند انتقال نتیجه شده باشد ، خودیك انتقال است یا به عبارت دیگر : **از ترکیب چند انتقال ، یك انتقال نتیجه می‌شود .**

برهان - فرض می‌کنیم‌که شکل F را بر اثر انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{V_1}$ به وضع F_1 (شکل ۶) ، و F_1 را براثر انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{V_2}$ به‌وضع F_2، و F_2 را براثر انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{V_3}$ به وضع F' در آورده باشیم و A ، A_1 ، A_2 و A' چهار وضع متوالی یك نقطهٔ آن باشند ؛ چند ضلعی AA_1A_2A' ، مساوی آن چندضلعی است‌که برای تعیین مجموع‌هندسی $\overrightarrow{V_1}$ ، $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ رسم‌کرده‌ایم ؛ پس $\overrightarrow{AA'}$همسنگ $\overrightarrow{R}$ ، مجموع هندسی آن بردارها،می‌باشد؛ یعنی اگربه شکل F انتقالی به‌اندازهٔ $\overrightarrow{R}$ ، بر-آیند بردارهای‌انتقال، بدهیم،شکل F'نتیجه می‌شود و کافی است به‌جای چند انتقال به اندازهٔ $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$و...، یك انتقال به اندازهٔ



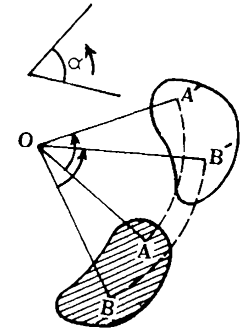
شکل ۶

مجموع هندسی بردارهای انتقال به شکل F داده شود .

ج - دوران

۸-تعریف - هرگاه زاویهٔ جهت داری مانند α (زاویه‌ای که به وسیلهٔ ضلع مبدأ و اندازهٔ جبریش مشخص است) و نقطه‌ای مانند O داده شده‌باشد و به ازای هر نقطه مانند A ازشکل F ، نقطه‌ای مانند 'A بقسمی بدست آوریم‌که داشته باشیم :

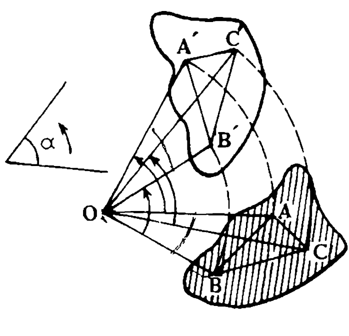
$$OA'=OA \text{ و } \widehat{AOA'}=\alpha$$



شکل ۷

از مجموع اوضاع جدید نقاط شکلF ، شکلی مانند 'F بدست می‌آید (شکل ۷) ؛ می‌گوییم که شکل 'F نتیجهٔ دوران شکل F در حول نقطهٔ O به اندازهٔ α است . O را **مرکزدوران** و α را **زاویهٔ دوران** می‌نامیم .

۹- قضیه - دوران ، شکل را تغییر نمی‌دهد ؛ یعنی تغییرمکان است .



شکل ۸

برهان - اگر A ، B وC (شکل۸) سه‌نقطهٔ دلخواه ازشکل F و 'A ، 'B و'C وضعهای‌جدید آنها پس از دوران در حول مرکز

O به‌اندازهٔ α باشند، دومثلث $A'B'C'$ و ABC به حالت تساوی سه‌ضلع متساویند . اما دلیل آنکه اضلاع این دومثلث با هم برابرند، چنین است:

I- $\Delta OAB = \Delta OA'B'$ چونکه : $OA = OA'$ و $OB = OB'$ و $\widehat{AOB'} - \alpha = \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ ؛ پس : $AB = A'B'$.

II - به دلیل مشابه $\Delta OAC = \Delta OA'C'$ ؛ پس : $AC = A'C'$.

III- به‌دلیل مشابه $\Delta OBC = \Delta OB'C'$؛ پس: $BC = B'C'$.

حال اگر $A'B'$ (ازمثلث $A'B'C'$) را به‌وسیلهٔ لغزاندن‌درصفحه بر AB (ازمثلثABC) منطبق‌سازیم ، C' هم بر C منطبق‌می‌شود ؛ و به همین ترتیب، هریك ازنقاط شکل F' بر نقطهٔ نظیرش از شکل F منطبق خواهد شد ؛ یعنی دو شکل متساویند . ■

۱۰-قضیه - در دوران ، زاویهٔ بین هردو پاره‌خط متناظر، مساوی است با زاویهٔ دوران .

برهان- هرگاه $A'B'$ و AB (شکل ۹) دو پاره‌خط متناظر ، در دوران به مرکز O و به زاویهٔ α باشند ، و از مرکز دوران O عمودهای OH و OH' را بترتیب بر AB و $A'B'$ فرود آوریم :

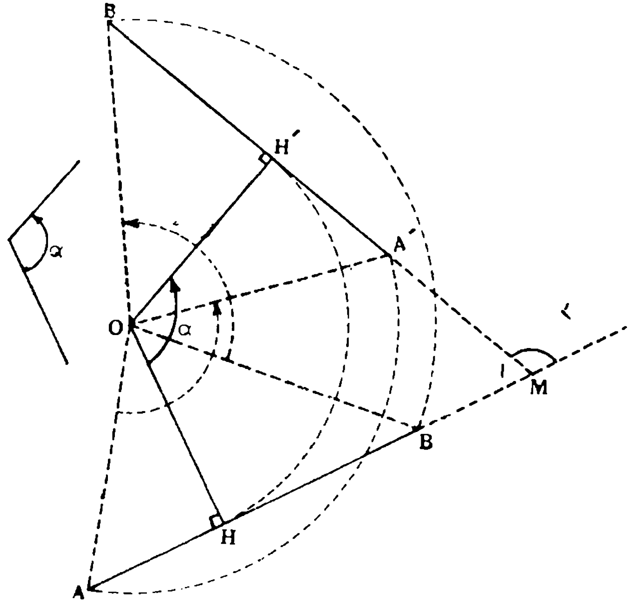
$$A'H' = AH$$

(به دلیل آنکه دردوشکل متساوی همهٔ اجزای متناظر متساویند.)

پس H' وضع جدید H است و $\widehat{HOH'} = \alpha$.

حال‌اگر M نقطهٔ تقاطع $A'B'$ و AB باشد، چهارضلعی $OH'MH$ (که دو زاویهٔ روبروی آن قائمه است) محاطی است و در آن ، زوایای M_1 و $O = \alpha$ مکمل یکدیگرند ؛ اما زاویهٔ بین دو امتداد $\overrightarrow{AB}$ و

$\overrightarrow{A'B'}$ نیز مکمل $\hat{M}_1$ است؛ پس با α مساوی است .



شکل ۹

د ـ تغییر مکان در صفحه

۱۱ـقضیه ـ هر تغییر مکانی که یك شکل تغییرناپذیر درصفحهٔ خود انجام داده باشد ، عبارت است از یك انتقال یا یك دوران .

برهان ـ می‌دانیم که اوضاع جدید دو نقطهٔ یك شکل برای مشخص‌کردن وضع جدید شکل کافی است ؛ پس وضع جدید دو نقطه را با وضع قدیم آنها می‌سنجیم .

اگر A' و B' بترتیب وضع‌جدید دو نقطهٔ A و B ازشکل‌باشد،

$A'B'$ و AB ممکن است یکی‌ازاین چند صورت را نسبت به هم داشته باشند :

I - متوازی و در یك جهت باشند .

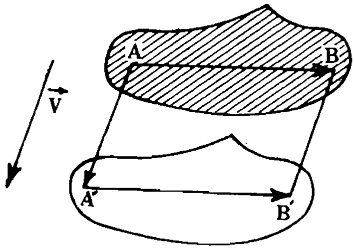
II - متوازی و در دو جهت مخالف باشند .

III - متوازی نباشند اما AA' با BB' موازی باشد .

IV - متوازی نباشند و AA' هم موازی با BB' نباشد .

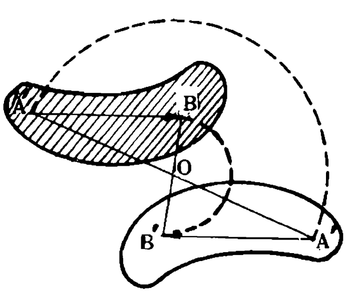
اینك قضیه را در مورد هر یك از این حالتها جداگانه ثابت می‌کنیم :

حالت اول- $A'B'$ و AB متوازی ودریك جهتند(شکل ۱۰). واضح است که انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AA'}$ ، شکل F را بوضع F' در می‌آورد .

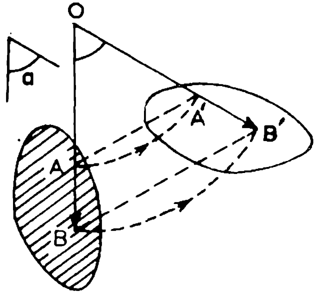


شکل ۱۰

حالت دوم - $A'B'$ و AB متوازی و در دو جهت مخالفند (شکل ۱۱) . اگر O مرکز متوازی‌الاضلاع $AB'A'B$ باشد، دورانی به مرکز O و به اندازهٔ $180°$ ، شکل F را به وضع F' در می‌آورد .

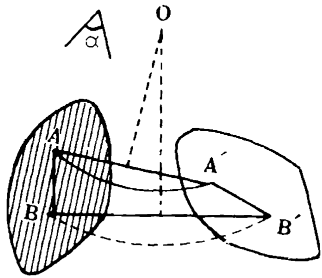


شکل ۱۱



شکل ۱۲

حالت سوم- AB با $A'B'$ موازی نیست اما $AA' \parallel BB'$ (شکل ۱۲) . امتدادهای دو ساق AB و $A'B'$ از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $AA'B'B$ یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند ؛ این نقطه بر روی خطی است که اوساط دو قاعدهٔ AA' و BB' را به هم وصل می‌کند و بر آنها عمود است ، پس دورانی به مرکز O و به‌اندازهٔ $\widehat{AOA'} = \hat{\alpha}$ ، شکل F را به وضع F' درمی‌آورد .



شکل ۱۳

حالت چهارم - $A'B'$ با AB و AA' با BB' موازی نیستند (شکل۱۳). عمودمنصفهای AA' و BB' یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند و دورانی به مرکز O و به اندازهٔ $\widehat{AOA'} = \hat{\alpha}$ شکل F را به وضع F' درمی‌آورد؛ زیرا که اولاً ،قوسهایی که به مرکز O وشعاعهای OA و OB رسم می‌کنیم، بترتیب بر A' و B' می‌گذرند . ثانیاً، با مراجعه به شکل می‌بینیم که:

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOA'} + \widehat{AOB} \quad \text{و} \quad \widehat{BOB'} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OB'}$$

اما به مناسبت متساوی بودن دو مثلث AOB و $A'OB'$ (به حالت سه ضلع) ، $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ ؛ پس :

$$\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'} = \hat{\alpha}$$

تمرین - شکل۱۳ رادرخارج رسم‌کنید و C و C' وضع قدیم وجدید يك نقطهٔ دیگر از شکل F را در نظر گرفته ثابت‌کنیدکه عمودمنصف CC' هم بر O می‌گذرد .

نتیجه - در حالت اول ، یعنی وقتی که AB با $A'B'$ موازی و در يك جهت است عمود منصفهای AA' و BB' با هم موازیند ، یا به عبارت دیگر ، یکدیگر را در نقطهٔ بینهایت دور قطع می‌کنند ؛ پس می‌توان گفت‌که : **انتقال، حالت‌خاصی‌است ازدوران ،که درآن، مرکزدوران در فاصلهٔ بینهایت دور قرار دارد .**

تمرین

۱- برمحل تلاقی دو دایره ، خطی بقسمی رسم‌کنیدکه‌مجموع‌وترهایی که دو دایره از آن جدا می‌کنند ، مساوی l باشد .

۲- برمحل تلاقی دو دایره خطی رسم‌کنید بقسمی‌که تفاضل وترهایی‌که دو دایره از آن جدا می‌کنند ، مساوی d باشد .

۳- خطی رسم‌کنیدکه با امتداد معینی موازی باشد و دو دایرهٔ مفروض را قطع‌کند و مجموع یا تفاضل وترهایی که درآنها بوجود می‌آورد ، مساوی مقدار معین l باشد .

۴- خطی موازی امتداد معین رسم‌کنیدکه دو دایرهٔ مفروض را قطع‌کند و وترهایی‌که در آنها ایجاد می‌کند ، با هم مساوی باشند .

۵- دو نقطهٔ A و B و دودایرهٔ C و C' داده شده‌اند ؛متوازی‌الاضلاعی بسازیدکه دو رأسش A و B و دو رأس دیگرش روی دو دایره باشد .

۶- در يك چهار ضلعی محاطی دو زاویهٔ مجاور و دو ضلع مقابل داده شده‌اند ؛ آن چهارضلعی را بسازید .

۷- ذوزنقه‌ای را با داشتن چهارضلع بسازید .

۸ - در يك چهارضلعی غیرمشخص $ABCD$ ، طول اضلاع و طول

خطی‌که وسط AB را به وسط CD وصل می‌کند ، دردست است ؛ چهارضلعی را بسازید .

۹- یك چهارضلعی با معلومات زیر بسازید :

الف - چهار ضلع و زاویهٔ بین دو ضلع متقابل .

ب - دوقطر و زاویهٔ بین آنها و دو زاویهٔ متقابل .

ج - سه ضلع و زوایای مجاور به ضلع چهارم .

۱۰- دوخط D و Δ و نقطهٔ A داده شده است ؛ مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازیدکه یك رأسش A و دو رأس دیگرش بر D و Δ واقع باشد .

۱۱- دو خط D و Δ و نقطهٔ A داده شده است ؛ مثلث‌متساوی‌الساقینی با زوایای معین بسازید که یك رأسش A و دو رأس دیگرش بر D و Δ واقع باشد .

۱۲- دودایره ونقطهٔ A داده شده است ؛ مثلث متساوی‌الاضلاعی‌بسازید که یك رأسش A و دو رأس دیگرش برروی دو دایره باشد .

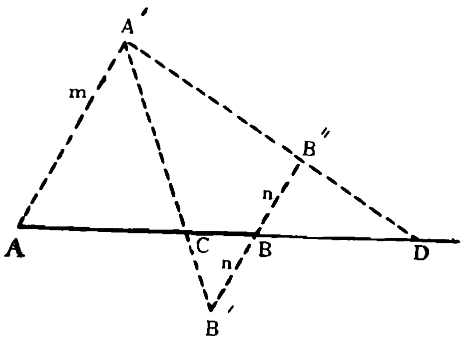
۱۳- در متوازی‌الاضلاع مفروض ، مربعی محاط‌کنید .

فصل سوم

تقسیم توافقی

الف ـ مقدمات

۱ ـ مسئله ـ تقسیم پاره‌خط AB به نسبت $\frac{m}{n}$ ـ یك راه برای اینکه پاره‌خط AB (شکل ۱) را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کنیم ، این است که از A و B دو خط متوازی دلخواه رسم کرده بر روی اولی طول AA' را مساوی m و بر روی دومی طولهای BB' و BB'' را مساوی n جدا کنیم ؛ $A'B'$ و $A'B''$ قطعهٔ AB وامتدادش را در C و D قطع می‌کنند؛ این دو نقطه همان دو نقطه‌ای‌است که پاره‌خط AB را به‌نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌کنند . زیرا از تشابه مثلثهای $A'AC$ و $B'BC$ از یك



شکل ۱

طرف ، و مثلثهای $A'AD$ و $B''BD$ از طرف دیگر ، لازم می‌آید که داشته باشیم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{m}{n}$$

یعنی نقاط C و D پاره‌خط AB را به‌نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌کنند .

یکی از این دو نقطه ، بین A و B و دیگری خارج آنها و بر امتداد AB است .

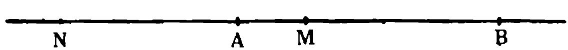
۲-قضیه- برروی پاره‌خط AB و امتداد آن فقط دو نقطه ، یکی بین A و B ودیگری درخارج آنهامی‌توان یافت بقسمی‌که نسبت فاصله‌هایشان از A و B مساوی عدد معلوم حسابی k باشد .

برهان - اولاً از حل مسئلهٔ ۱ معلوم شد که می‌توان یك نقطهٔ M بین A و B و یك نقطهٔ N در خارج پاره‌خط AB یافت که نسبت فاصله‌های آنها از A و B برابر عدد k باشد (k را می‌توان همیشه به صورت $\frac{m}{n}$ نوشت)؛ یعنی :

$$\frac{MA}{MB}=k \quad \text{و} \quad \frac{NA}{NB}=k$$

واضح است در حالتی که $k<1$ باشد ، M و N به نقطهٔ A نزدیکترند تا به نقطهٔ B .

بنابراین ، اگر نقطهٔ N خارج AB فرض شود، N درطرفی‌که A قرار دارد ، واقع می‌شود (شکل ۲) .



شکل ۲

و اگر $k>1$ باشد ، M و N به نقطهٔ B نزدیکترندتا به‌نقطهٔ A، بخصوص N در طرف B واقع می‌شود .

اگر $k=1$ باشد ، M وسط AB است و N وجودندارد ؛ زیراکه $A'B''$ (شکل ۱) موازی با AB خواهد شد .

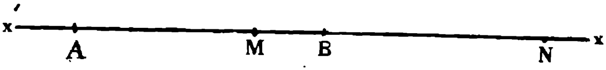
ثانیاً بسهولت دیده می‌شودکه بجز M نقطهٔ دیگری بین A و B نمی‌تواند وجود داشته باشد بقسمی‌که نسبت فواصلش ازA و B برابرهمان عدد k باشد . زیراکه اگر گفته شود M' آن نقطه است می‌گوییم‌که از دوحال خارج نیست یا M' بین M و B است یا بین M و A؛ درحالت اول ، $\frac{M'A}{M'B}$ مسلماً بزرگتر از $k=\frac{MA}{MB}$ است ؛ زیرا $M'A>MA$ و $M'B<MB$؛ درحالت دوم، $\frac{M'A}{M'B}$ مسلماً کوچکتر از $k=\frac{MA}{MB}$ است؛ زیرا $M'A<MA$ و $M'B>MB$. پس $\frac{M'A}{M'B}$ نمی‌تواندبرابر k باشد مگر آنکه M' را روی M بگیریم .

همینطور، دیده می‌شودکه N هم منحصر به فرد است .

۳ـ قضیه ـ روی خط نامحدودی‌که بردو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد ، فقط یك نقطه مانند M می‌توان یافت بقسمی‌که نسبت اندازه‌های جبری دو بردار MA و MB یعنی نسبت ($\overline{MA}$ و $\overline{MB}$)، برابرعدد جبری مفروض k باشد .

به موجب قضیهٔ قبل ، دو نقطهٔ M و N ، و فقط دو نقطه ، روی AB و امتداد آن یافت می‌شود بقسمی که از حیث مقدار مطلق ،

$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=|k|$ (شکل ۳) .



شکل ۳

اما برای M ، که بین نقاط A و B است ، $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ مختلف‌العلامه‌اند و $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ منفی است ، و برای N که خارج پاره‌خط AB است ، $\overline{NA}$ و $\overline{NB}$ متحدالعلامه‌اند و $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ مثبت است (جهت محور هر چه باشد) ؛ پس اگر k مثبت باشد ، فقط N جواب است؛ زیرا منحصراً برای نقطهٔ N رابطهٔ : $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=k$ محقق است .

و اگر k منفی باشد ، فقط M جواب خواهدبود ؛ زیرا تنها برای نقطهٔ M رابطهٔ : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$ برقرار خواهد بود .

دقت کنید! با ملاحظهٔ آنچه گفته شد ، اگر اندازه‌های جبری را دخالت دهیم ، همواره تساوی زیر را خواهیم داشت :

$$\boxed{\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}}$$

ب - تقسیم توافقی

۴ - تعریف - هرگاه بر روی محور x'x چهار نقطهٔ A ، B ،

(یا اگر روی خطی چهار نقطهٔ A ، B ، M و N چنان باشند که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ M و N چنان باشند که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ باشد)، می‌گوییم : M و N **نسبت به A و B مزدوج توافقی یکدیگرند ؛ یا M و N پاره خط AB را به‌نسبت توافقی تقسیم‌کرده‌اند .**

رابطهٔ $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ (۱) را **رابطهٔ توافقی** می‌نامند .

۵ ـ قضیه ـ خاصیت توافقی متقابل است ، یعنی اگر M و N نسبت به A و B مزدوج توافقی یکدیگر باشند ، A و B هم نسبت به M و N مزدوج توافقی یکدیگرند؛ یعنی رابطهٔ زیر نیز برقرار است :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=-\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$$

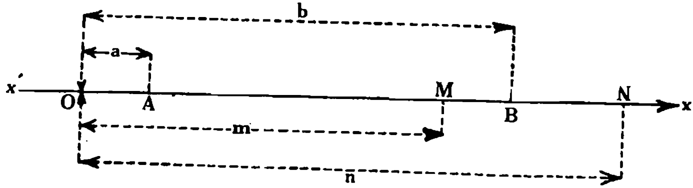
برهان ـ اگر در رابطهٔ $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ صورت و مخرج هر طرف را در ۱ − ضرب‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=-\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$$

اکنون ، اگر جای دو وسط را با هم عوض کنیم ، رابطهٔ مطلوب $\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}=-\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$ بدست می‌آید .

۶ـ تعریف دیگر ـ وقتی‌که بین چهار نقطهٔ **واقع** بر یك خط راست رابطهٔ توافقی برقرار باشد ، می‌گوییم‌که آن **چهار نقطه یك تقسیم توافقی تشکیل داده‌اند .**

۷-تعبیر جبری رابطهٔ توافقی- هرگاه بر روی محور $x'x$ که یك تقسیم توافقی $(ABMN)$ بر آن قرار دارد ، نقطهٔ دلخواهی مانند



شکل ۴

O را مبدأ طولها اختیارکنیم (شکل ۴) و طولهای نقاط A ، B ، M و N یعنی $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OM}$ و $\overline{ON}$ را بترتیب به a ، b ، m و n نمایش دهیم ، با توجه به اینکه **اندازهٔ جبری هر بردار واقع بریك محور، برابر است با طول منتهای بردار منهای طول مبدأ آن**(**نتیجهٔ قضیهٔ شال**)،می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{OA}-\overline{OM}}{\overline{OB}-\overline{OM}} \quad , \quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{OA}-\overline{ON}}{\overline{OB}-\overline{ON}}$$

و با توجه به دو رابطهٔ اخیر ، رابطهٔ توافقی $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\overline{OA}-\overline{OM}}{\overline{OB}-\overline{OM}}=-\frac{\overline{OA}-\overline{ON}}{\overline{OB}-\overline{ON}}$$

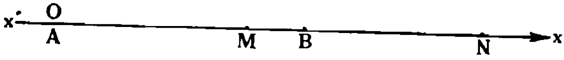
یا :

$$\frac{a-m}{b-m}=-\frac{a-n}{b-n}$$

این رابطه را بسادگی می‌توان به صورت زیر در آورد :

$$\boxed{۲(ab+mn)=(a+b)(m+n)} \qquad (۲)$$

۸ - صورتهای مهم دیگر از رابطهٔ توافقی - اولاً هرگاه بر روی محور $x'x$ مبدأ O را همان نقطهٔ A انتخاب‌کنیم (شکل ۵)، طول



شکل ۵

OA مساوی صفر می‌شود، و چون در رابطهٔ ۲ به جای a صفرقراردهیم، آن رابطه به این صورت در می‌آید :

$$۲mn = bm + bn$$

که پس از تقسیم دو طرف بر bmn ، حاصل می‌شود :

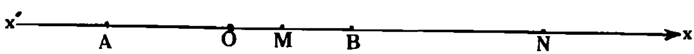
$$(۳) \qquad \boxed{\frac{۲}{b} = \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n}}$$

یا :

$$\frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{AN}}$$

یعنی : **اگر در یک تقسیم توافقی یکی از نقاط تقسیم رامبدأ طولها اختیار کنیم ، دو برابرعکس طول مزدوج آن نقطه مساوی است با مجموع عکسهای طولهای دو نقطهٔ دیگر .**

ثانیاً اگر بر روی محور $x'x$ مبدأ O را وسط قطعه‌خط AB انتخاب‌کنیم (شکل ۶) ، $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ متساوی و مختلف‌العلامه می‌شوند



شکل ۶

و داریم : $b = -a$ ؛ حال اگردر رابطهٔ ۲ به جای b ، $(-a)$ را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$۲(-a^۲+mn)=۰$$

یا : $$\boxed{mn=a^۲} \qquad (۴)$$

یا : $$\overline{OM}.\overline{ON}=\overline{OA}^۲$$

از این رابطه معلوم می‌شود که $\overline{OM}$ و $\overline{ON}$ هم علامتند ؛ یعنی $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متحدالجهتند و در نتیجه M و N همیشه در یك طرف O (وسط AB) قرار دارند .

بنابراین : **هرگاه دو نقطه پاره‌خطی را به نسبت‌توافقی تقسیم‌کنند، هر دو نقطه دریك طرف وسط آن پاره‌خط هستند وحاصل‌ضرب فاصله‌های وسط پاره‌خط از آن دو نقطه مساوی است با مربع نصف پاره‌خط مفروض.**

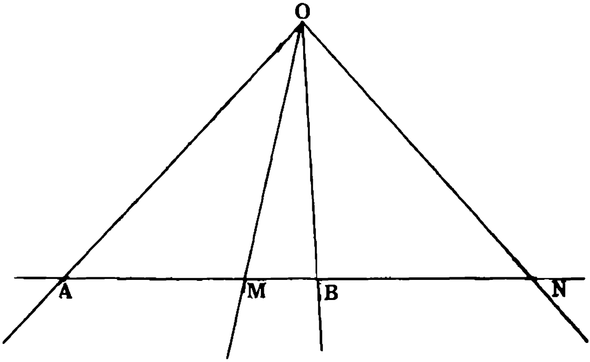
توجه‌کنید! رابطه‌های ۱ و ۲ و ۳ و۴ ، صورتهای مختلف رابطهٔ توافقی هستند .

ج - دستگاه توافقی

۹ - **تعریف** - دستگاه توافقی ، یا دستهٔ شعاعهای توافقی، عبارت از چهار خط متقارب‌است‌که بر چهار نقطهٔ یك تقسیم توافقی بگذرند . مثلاً اگر در شکل ۷ ، بین چهار نقطهٔ A ، B ، M وN رابطهٔ توافقی برقرار باشد، چهارخط OA ، OB ، OM و ON یك دستگاه توافقی است‌که آن را به این صورت نمایش می‌دهند : (O-ABMN).

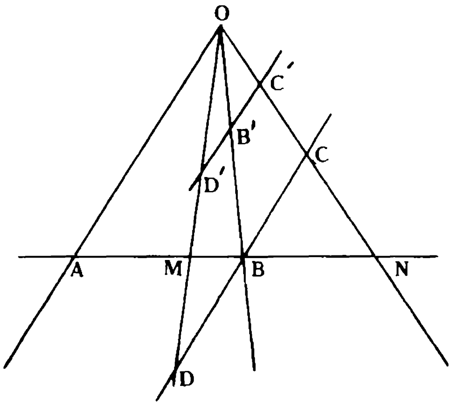
هریك از چهار خط را یك شعاع دستگاه می‌نامند .

چون جای O را تغییر دهیم ، می‌بینیم که با یك تقسیم توافقی دستگاههای توافقی بیشمار می‌توان ساخت .



شکل ۷

۱۰- قضیه - هرگاه خطی به‌موازات یك شعاع دستگاه توافقی رسم شود، سه شعاع دیگر بر روی آن، دو پاره‌خط متساوی جدا می‌کنند.



شکل ۸

برهان - اگر خط $D'C'$ (شکل۸) دستگاه توافقی (O-ABMN) را به‌موازات شعاع OA قطع کرده باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که $B'D' = B'C'$.

از B خطی موازی با OA می‌کشیم تا دو شعاع دیگر را در C و D قطع کند؛ اگر ثابت کنیم که $BD = BC$، به‌موجب قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $B'D' = B'C'$.

از تشابه دو مثلث MAO و MBD می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{OA}{BD} = \frac{MA}{MB} \qquad (1)$$

و از تشابه دو مثلث NAO و NBC داریم:

$$\frac{OA}{BC}=\frac{NA}{NB} \qquad (۲)$$

اما بنا به فرض داریم :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB} \text{ یا } \left|\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\right|=\left|-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\right| \text{ پس } \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

یعنی طرفهای دوم رابطه‌های ۱ و ۲ متساویند و در نتیجه :

$$\frac{OA}{BD}=\frac{OA}{BC}$$

یعنی $BD=BC$ ، و از آنجا ، همانطور که در ابتدا گفته شد ، $B'D'=B'C'$.

۱۱ ـ قضیه ـ روی هر خطی که دستگاه توافقی را قطع کند ، نقاط تقاطع ، تشکیل یك تقسیم توافقی می‌دهند .

برهان ـ اگر $(O-xzyt)$ دستگاه توافقی باشد(شکل۹) وخط Δ آن را در K، R، H و S قطع‌کرده باشد، از R خطی موازی OK می‌کشیم تا دو شعاع دیگر را در C و D قطع‌کند؛ چون دستگاه ،توافقی است :

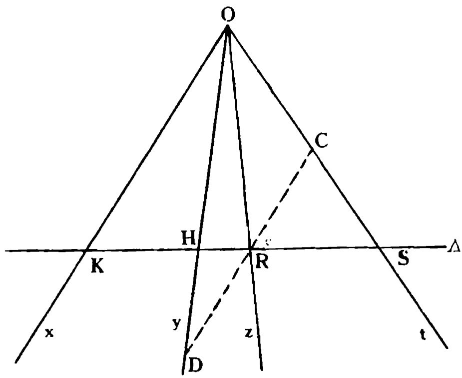
$$RC=RD \qquad (۱)$$

اما در دومثلث متشابه HOK و HDR داریم:

$$\frac{HK}{HR}=\frac{OK}{DR} \qquad (۲)$$

و در دو مثلث متشابه SOK و SRC داریم:

$$\frac{SK}{SR}=\frac{OK}{RC} \qquad (۳)$$



شکل ۹

با توجه به رابطهٔ ۱ ، طرفهای دوم رابطه‌های ۲ و ۳ متساویند ؛

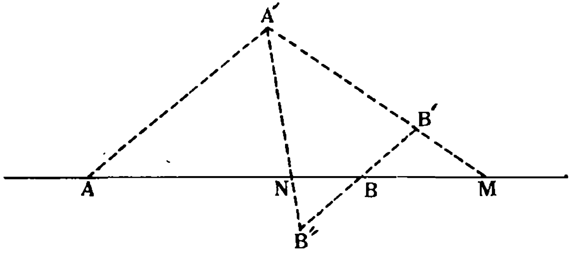
بنابراین :
$$\frac{HK}{HR}=\frac{SK}{SR}$$

یا با توجه به علامت :
$$\frac{\overline{HK}}{\overline{HR}}=-\frac{\overline{SK}}{\overline{SR}}$$

یعنی نقاط K ، R ، H و S از خط Δ ، یك تقسیم توافقی تشکیل داده‌اند .

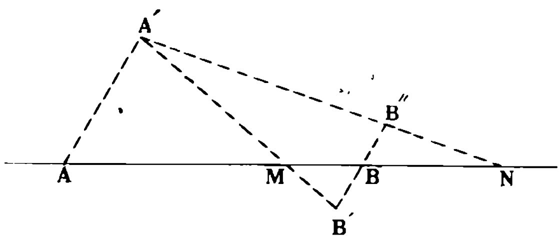
۱۲ ـ مسئله ـ سه نقطهٔ A ، B و M بر روی یك خطی داده شده است . مزدوج توافقی M را نسبت به A و B ، به وسیلهٔ ترسیم ، بدست آورید .

راه اول ـ از A و B (شکل ۱۰ یا ۱۱) دوخط متوازی دلخواه رسم می‌کنیم و از M خطی می‌گذرانیم تا آنهارا در ´A و ´B قطع کند؛



شکل ۱۰

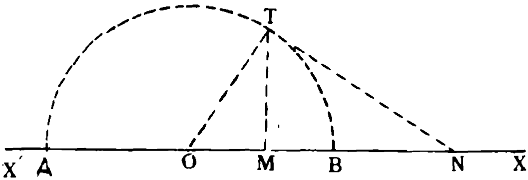
"B قرینهٔ ´B را نسبت به B بدست می‌آوریم و از ´A به "B وصل



شکل ۱۱

می‌کنیم؛ "A´B" خط AB را (یا امتداد "A´B" امتداد AB را) در نقطهٔ مطلوب N قطع خواهد کرد .

راه دوم ـ به قطر AB نیمدایره‌ای می‌زنیم (شکل ۱۲)؛ از M عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ T قطع کند؛ مماس بردایره در نقطهٔ T، امتداد AB را در N قطع می‌کند، بطوری‌که اولاً

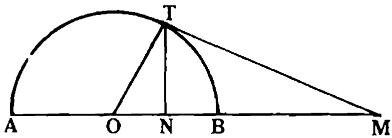


شکل ۱۲.

O وسط AB و M و N در یك طرف O واقعند و ثانیاً داریم :

$$OM\cdot ON = OT^2 = OA^2$$

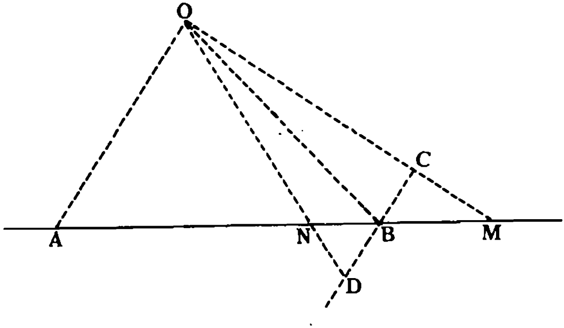
اگر نقطهٔ M در امتداد پاره‌خط AB باشد (شکل۱۳)،ابتدا نیمدایره‌ای به قطرAB می‌کشیم؛سپس‌از



شکل ۱۳

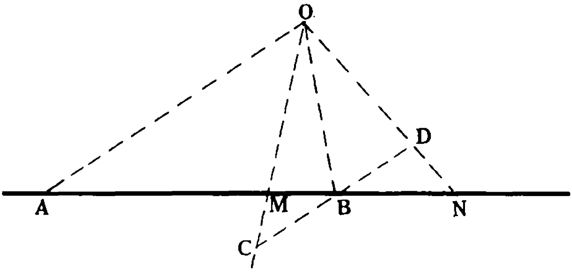
نقطهٔ M مماس MT را بر نیمدایره رسم‌کرده و از نقطهٔ تماس ، T،عمود TN را برAB فرود می‌آوریم ؛ نقطهٔ N، پای این‌عمود ، نقطهٔ مطلوب است .

راه سوم ـ از نقطه‌ای چون O به A ، M و B وصل می‌کنیم (شکل۱۴ یا ۱۵) و ازB خطِی موازی OA می‌کشیم تا OM را در نقطهٔ C قطع‌کند؛ BD را روی CB به‌اندازهٔ BC جدامی‌کنیم وOD راوصل



شکل ۱۴

می‌کنیم؛ OD خط AB را (یا امتداد OD امتداد AB را) در نقطهٔ مطلوب N قطع خواهدکرد .



شکل ۱۵

تمرین

۱ ـ ثابت کنید که در دو دایرهٔ متخارج ، نقاط برخورد خط المرکزین با مماسهای مشترك داخلی وخارجی، نسبت به مرکزهای دو دایره مزدوج توافقی یکدیگرند .

۲ ـ ثابت کنید که در ذوزنقه ، نقطهٔ تلاقی دو قطر ونقطهٔ برخورد دوساق ووسطهای دوقاعده روی یك خط قرار دارند ویك تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۳ ـ هرگاه چهار نقطهٔ A ، B ، C و D بر روی یك خط راست چنان باشند که رابطهٔ :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$$

برقرار و M وسط CD باشد ، ثابت کنید که :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k^2$$

۴ ـ دونقطهٔ A و B داده شده است ؛ برخط AB دونقطهٔ C و D چنان بیابید که پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کنند و طول پاره‌خط CD مساوی l باشد .

۵ ـ درمثلث متساوی الساقین ABC ارتفاع رأس A قاعدهٔ BC را در H و دایره‌ای راکه در B و C برساقها مماس است در M و N قطع می‌کند. ثابت‌کنید که چهار نقطهٔ A ، H ، M و N یك تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۶ ـ پنج ضلعی منتظم ومحدب $ABCDE$ در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R محاط است؛ خط OAکه عمود منصف ضلع CD وقطر BE می‌باشد این دوخط را بترتیب در نقاط F و G قطع می‌کند ؛ طولهای OF و OG را برحسب R حساب کرده ازآن رو ثابت‌کنید که نقاط F و G مزدوج توافقی یکدیگرند نسبت به دو نقطهٔ O و A .

۷ ـ بر روی ضلع BC از مثلث ABC وبرامتداد آن ، نقاط P و Q را مزدوج یکدیگرنسبت به B و C اختیار می‌کنیم ؛ مطلوب است مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ .

۸ ـ ثابت کنید که نیمسازهای دو زاویهٔ حادث بین دوخط متقاطع ، بااین دو خط یك دستگاه توافقی بوجود می‌آورند .

۹ ـ ثابت کنیدکه هرگاه دریك دستگاه توافقی دوشعاع غیر مجاور برهم عمود باشند ، این دو شعاع نیمسازهای زوایای بین دو شعاع دیگرند .

۱۰ـ یکی از میانه‌های مثلث ABC را رسم کنید وشعاع مزدوج‌آن را نسبت به دوضلع دیگر بدست آورید .

۱۱ـ چرا نیمساز زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین با قاعدهٔ آن مثلث موازی است .

۱۲ـ اگر دستگاه ($O-MNPQ$) توافقی باشد ، آن را با داشتن زاویه‌های MOP و NOQ رسم کنید .

۱۳ـ در دایره‌ای دو وتر AB و AC را رسم می‌کنیم ؛ قطر عمود بر AB وتر AC را در H وامتداد BC را در K و دایره را در M و N قطع می‌کند؛ ثابت‌کنیدکه M و N قطعه‌خط HK رابه نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

۱۴- قطر AB و وتر RQ عمود بر AB در دایره‌ای مفروضند ؛ از نقطهٔ P واقع برمحیط دایره به A و B وصل می‌کنیم تا RQ را در M و N قطع کنند ؛ چرا M و N نسبت به R و Q مزدوج توافقی یکدیگرند ؟

۱۵- در مثلث غیر مشخص ABC ، ضلع BC را تا نقطهٔ D به اندازهٔ خود امتداد دهید ($CD=CB$) ؛ بر AB طولهای $AE=\frac{AB}{۲}$ و $AF=\frac{AB}{۳}$ را جدا کنید ؛ DE و DF را رسم کنید ومحل برخورد آنها را با ضلع AC ، G و H نام بگذارید ؛ EH و FG را رسم‌کنید ومحل تلاقی آنها را I بنامید ؛ DI را بکشید تا ضلع AB را قطع کند ونقطهٔ تقاطع را به K نمایش دهید ؛ ثابت کنید : $EK=\frac{AB}{۱۰}$.

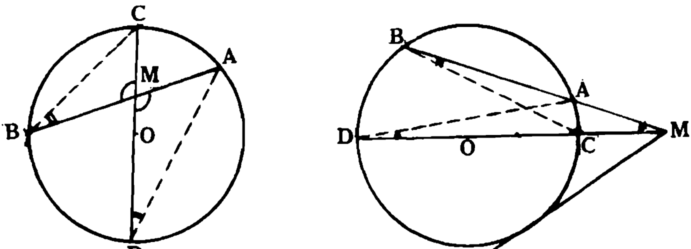
راهنمایی - از خاصیت میانه های یك مثلث وتمرین ۲ استفاده کنید .

فصل چهارم

قوت نقطه

الف ـ قوت نقطه نسبت به دایره

۱ـ قضیه ـ هرگاه از نقطه‌ای مانند M(داخل یا خارج دایره،شکل۱) **خط متغیری بگذرانیم تا دایرهٔ O را در دو نقطهٔ A و B قطع کند ،حاصل ضرب دوقطعهٔ MA و MB همواره مقداری است ثابت .**



شکل ۱

برهان ـ قطری از دایره را که بر M می‌گذرد رسم می‌کنیم تا دایره را در C و D قطع کند ؛ دومثلث MAD و MBC که زاویه‌های آنها نظیر بنظیر متساویند ، مشابه با یکدیگرند ، پس :

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MB} \quad \text{یا} \quad MA.MB=MC.MD \qquad (۱)$$

یعنی قاطع MAB به هر وضعی باشد ، حاصل ضرب MA.MB همواره مساوی مقدار ثابت MC.MD است .

۲ ـ تعریف ـ اگر روی هر خط مارّ بر $\mathbf{M}$ جهت قائل شویم (یعنی روی خط محور اختیار کنیم) می‌بینیم چنانچه $\mathbf{M}$ خارج دایره باشد، چون $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در یك طرف $\mathbf{M}$ هستند $\overline{\mathbf{MA}}$ و $\overline{\mathbf{MB}}$ هم‌علامتند و $\overline{\mathbf{MA}}\cdot\overline{\mathbf{MB}}$ مثبت است و چنانچه $\mathbf{M}$ داخل دایره باشد، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در طرفین $\mathbf{M}$ خواهند بود و $\overline{\mathbf{MA}}.\overline{\mathbf{MB}}$ منفی است.

پس با در نظر گرفتن رابطهٔ ۱ ،که بین طولهای پاره‌خطها برقرار است ، بین اندازه‌های جبری نیز همواره رابطهٔ زیر برقرار است :

$$(۲)\qquad \overline{\mathbf{MA}}\cdot\overline{\mathbf{MB}}=\overline{\mathbf{MC}}\cdot\overline{\mathbf{MD}}$$

یعنی اگر قاطع $\mathbf{AB}$ که بر $\mathbf{M}$ می‌گذرد تغییر کند حاصل ضرب اندازه‌های جبری $\overline{\mathbf{MA}}$ و $\overline{\mathbf{MB}}$ ثابت است و بستگی به وضع قاطع ندارد.

این مقدار ثابت راکه فقط بستگی به جای $\mathbf{M}$ دارد ، قوت نقطهٔ $\mathbf{M}$ نسبت به دایرهٔ $\mathbf{O}$ می‌نامیم .

$$\text{قوت نقطهٔ } \mathbf{M} = \mathbf{p}=\overline{\mathbf{MA}}\cdot\overline{\mathbf{MB}}=\overline{\mathbf{MC}}\cdot\overline{\mathbf{MD}}$$

اگر شعاع دایره را $\mathbf{r}$ و فاصلهٔ $\mathbf{M}$ از $\mathbf{O}$ ، مرکز دایره ، را $\mathbf{d}$ بنامیم داریم :

$$(۳)\qquad \mathbf{p}=\mathbf{d}^2-\mathbf{r}^2$$

زیرا به موجب قضیهٔ شال :

$$\overline{\mathbf{MC}}=\overline{\mathbf{MO}}+\overline{\mathbf{OC}}$$
$$\overline{\mathbf{MD}}=\overline{\mathbf{MO}}+\overline{\mathbf{OD}}=\overline{\mathbf{MO}}-\overline{\mathbf{OC}}$$

پس :

$$\mathbf{p}=\overline{\mathbf{MC}}.\overline{\mathbf{MD}}=(\overline{\mathbf{MO}}+\overline{\mathbf{OC}})\ (\overline{\mathbf{MO}}-\overline{\mathbf{OC}})=\overline{\mathbf{MO}^2}-\overline{\mathbf{OC}^2}$$

و بطور خلاصه :
$$\mathbf{p}=\mathbf{d}^2-\mathbf{r}^2$$

به موجب رابطهٔ ۳، برحسب آنکه نقطهٔ M خارج‌دایره، یاروی آن ، یا داخل دایره باشد ، قوت آن مثبت ، مساوی صفر ، یا منفی است ، یعنی :

اگر داشته باشیم : $d>r$ ، داریم : $p>0$

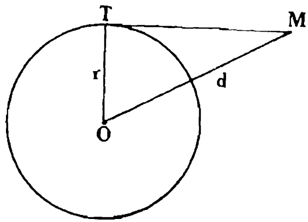
و اگر داشته باشیم : $d=r$ ، داریم : $p=0$

و اگر داشته باشیم : $d<r$ ، داریم : $p<0$

۳- هرگاه در شکل ۲ از نقطهٔ M مماس MT را بر دایره رسم‌کنیم ، درمثلث MOTداریم :

$$\overline{MT}^2=\overline{MO}^2-\overline{OT}^2$$

$$=d^2-r^2=p$$



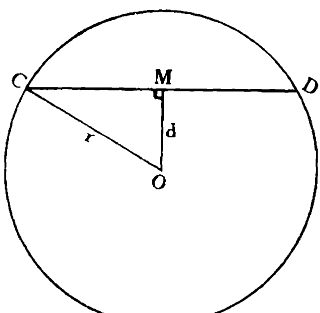
شکل۲

یعنی : قوت یك نقطه که خارج دایره واقع باشد ، مساوی با مربع طول مماس مرسوم از آن نقطه بر دایره است .

هرگاه نقطهٔ M داخل‌دایره باشد (شکل ۳) و از نقطهٔ M وتر به طول مینیمم *یعنی CMD را رسم‌کنیم،در مثلث MOC داریم:

$$\overline{MC}^2=\overline{OC}^2-\overline{MO}^2=r^2-d^2$$

$$=-(d^2-r^2)=-p$$



شکل ۳

یا

$$p=-\overline{MC}^2$$

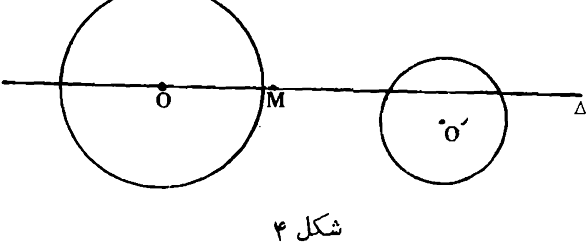
* وتر عمود بر OM طولش مینیمم است (چرا ؟) .

یعنی : قوت یك نقطه که داخل دایره واقع باشد، مساوی و مختلف‌العلامه است با مربع نصف وتر به طول مینیمم که از آن نقطه می‌گذرد .

نتیجه - اگر سه نقطهٔ A ، B و T بر یك امتداد نباشند و P نقطه‌ای برامتداد AB باشد بقسمی‌که داشته باشیم : $PA.PB=PT^2$، دایرهٔ محیطی مثلث ABT در T بر خط PT مماس است .

ب - محور اصلی دو دایره

۴- دو دایرهٔ متخارج O و O' را در نظر می‌گیریم (شکل ۴) ؛ از O خط دلخواهی مانند Δ می‌گذرانیم‌تا دایرهٔ O' را قطع‌کند ؛ برروی قطعه‌ای ازاین‌خط که بین دو دایره و خارج ازهر دو می‌باشد، نقطه‌ای مانند M خیلی نزدیك به محیط دایرهٔ O اختیار می‌کنیم ؛ اگر قوت این نقطه را نسبت به دایرهٔ O مساوی p و نسبت به دایرهٔ O' مساوی



شکل ۴

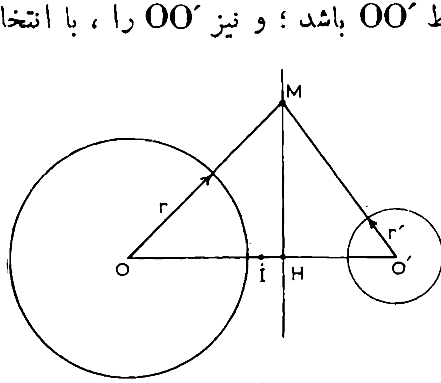
p' فرض‌کنیم ، بدیهی است‌که $p<p'$ ، زیراکه p و p' هر دو مثبت و p خیلی نزدیك به صفر است ؛ حالا M را روی Δ به طرف دایرهٔ O' سیر می‌دهیم ، p بتدریج بزرگتر و p' رفته‌رفته کوچکتر می‌شود ، تا

وقتی که M خیلی نزدیک به دایرهٔ O′ شود ، یعنی p′ خیلی به صفر نزدیک شود ؛ در این صورت، مسلماً $p>p'$ خواهد بود ؛ پس در سیر نقطهٔ M بر روی خط Δ ، مسلماً لحظه‌ای فرا رسیده است که p با p′ مساوی شده باشد ، زیرا که اگر از دومقدار نامتساوی مقدار کوچکتر رفته‌رفته بزرگتر شود و مقدار بزرگتر بتدریج تنزل کند تا ترتیب عدم تساوی آنها معکوس شود ، دریك لحظه این دومقدار باهم مساوی می‌شوند.

آنچه گفتیم، برای توضیح این مطلب بود که روی هر خط مانند Δ از شکل قبل ، می‌توان نقطه‌ای یافت که نسبت به دو دایره هم‌قوه باشد.

۱) مشهور **۵ ـ قضیه ـ مکان هندسی نقاطی که نسبت به دو دایره هم‌قوه باشند ، خطی است مستقیم عمود بر خط‌المرکزین دو دایره .**

برهان ـ فرض می‌کنیم O و O′ (شکل ۵) مرکزهای دو دایره و r و r′ ($r>r'$) بترتیب ، شعاعهای آن دو دایره و M نقطه‌ای هم‌قوه نسبت به این دوایر و H تصویر M بر خط‌المرکزین OO′ و نقطهٔ I وسط OO′ باشد ؛ و نیز OO′ را ، با انتخاب جهت مثبتی اختیاری بر آن، محوری می‌انگاریم که مبدأ طولها بر روی آن ، نقطهٔ I باشد .



شکل ۵

بنا برفرض، نقطهٔ M نسبت به دو دایرهٔ O و O′ هم قوه است؛

پس داریم :

$$\overline{MO}^2 - r^2 = \overline{MO'}^2 - r'^2$$

و از آنجا :

$$(1) \quad \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = r^2 - r'^2$$

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HMO و HMO' داریم :

$$(2) \quad \overline{MO}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{HO}^2$$

و

$$(3) \quad \overline{MO'}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{HO'}^2$$

و از آنجا :

$$(4) \quad \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = \overline{HO}^2 - \overline{HO'}^2$$

از مقایسهٔ روابط ۱ و ۴ معلوم می‌شود :

$$(5) \quad \overline{HO}^2 - \overline{HO'}^2 = r^2 - r'^2$$

اما

$$\overline{HO} = \overline{IO} - \overline{IH}$$

و

$$\overline{HO'} = \overline{IO'} - \overline{IH} = -\overline{IO} - \overline{IH} = -(\overline{IO} + \overline{IH})$$

و چون این مقادیر $\overline{HO}$ و $\overline{HO'}$ را در رابطهٔ ۵ قرار داده رابطهٔ حاصل را مختصر کنیم ، چنین خواهیم داشت :

$$-4\overline{IO} \times \overline{IH} = r^2 - r'^2$$

یا

$$-4\left(-\frac{\overline{OO'}}{2}\right) \times \overline{IH} = r^2 - r'^2$$

یا

$$(6) \quad 2\overline{OO'} \times \overline{IH} = r^2 - r'^2$$

و از آنجا :

$$(7) \quad \overline{IH} = \frac{r^2 - r'^2}{2\overline{OO'}}$$

بطوری‌که می‌بینید ، $\overline{IH}$ مقدار معینی دارد و در نتیجه نقطهٔ H که تصویر M بر OO' است ، نقطهٔ ثابتی می‌باشد ، یعنی هرگاه از همهٔ نقاطی که نسبت به دو دایرهٔ O و O' هم قوه باشند ، عمودهایی بر خط‌المرکزین فرود آوریم ، پای همگی این عمودها نقطهٔ ثابت H بوده و در نتیجه کلیهٔ عمودهای مذکور بر یکدیگر منطبقند . به عبارت دیگر :

همهٔ نقطه‌هایی که نسبت به دو دایره دارای قوتهای متساویند ، بر روی یك خط ثابت عمود بر خط‌المرکزین قرار دارند .

بعکس ، بآسانی می‌توان ثابت کرد که همهٔ نقاط این خط نسبت به دو دایره هم‌قوتند .

این خط راکه مکان هندسی نقاط هم‌قوت نسبت به دو دایره است، **محوراصلی** دو دایره می‌نامند .

بر حسب اوضاع مختلف دو دایره نسبت به‌هم ، وضع محور اصلی دو دایره نسبت به آن دوایر ، بدین قرار است :

الف - محور اصلی دو دایرهٔ مماس بر هم ، مماس مشترکی است که بر نقطهٔ تماس دو دایره می‌گذرد (چرا ؟) .

ب - محوراصلی دو دایرهٔ متقاطع ، خطی است‌که بر نقاط تقاطع آنها می‌گذرد (به چه دلیل ؟) .

ج - اگر دو دایره هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند ، محور اصلی آنها با هیچیك از آنها هیچ نقطهٔ مشترکی نخواهد داشت ؛ زیرا اگر محور اصلی با یکی از دو دایره یك یا دو نقطهٔ مشترك داشته باشد ،

قوت این نقطه یا نقاط مشترك ، نسبت به دایرهٔ نامبرده صفر و نسبت به دایرهٔ دیگر مخالف صفرخواهد بود ، یعنی بر روی محور اصلی دو دایره نقطه یا نقاطی مختلف‌القوه نسبت به دو دایره وجود خواهد داشت و این ممکن نیست .

دراین حالت ، برای تعیین وضع محور اصلی نسبت به دو دایره ، چون رابطهٔ ۶ را به صورت :

$$4\overline{IO'} \times \overline{IH} = r^2 - r'^2 \qquad (8)$$

بنویسیم ، با توجه به اینکه مقدار $r^2 - r'^2$ مثبت می‌باشد ، واضح می‌شود که $\overline{IO'}$ و $\overline{IH}$ متحدالعلامه‌اند و از اینجا معلوم می‌شود که نسبت به وسط خط‌المرکزین ، محور اصلی دو دایره در همان طرفی قرار دارد که مرکز دایرهٔ کوچکتر واقع است . به بیان دیگر ، محور اصلی دو دایره و مرکز دایرهٔ کوچکتر ، در یك طرف وسط خط‌المرکزین قرار دارند .

علاوه براین ، اگر دو دایره مانند شکل ۵ متخارج باشند ، نقطهٔ H بین دو دایره واقع خواهد بود ؛ زیرا اگر رابطهٔ ۷ را بر حسب قدر مطلق به صورت :

$$IH = \frac{r+r'}{OO'} \times \frac{r-r'}{2}$$

بنویسیم ، چون : $OO' > r + r'$، در نتیجه $\frac{r+r'}{OO'} < 1$ وچنین‌خواهیم داشت :

$$IH<\frac{r-r'}{۲}<\frac{r+r'}{۲}<\frac{OO'}{۲}$$

یا

$$IH<IO'$$

چنانچه دو دایره متداخل باشند ، نقطهٔ H برامتدادخطالمرکزین و نسبت به نقطهٔ I در همان طرفی است که نقطهٔ O' قرار دارد .

بخصوص ، اگر دو دایره متحدالمرکز باشند ، OO' برابر صفر و در نتیجه محور اصلی دو دایره به فاصلهٔ بینهایت دور می‌افتد .

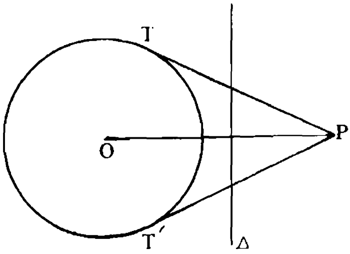
۶ ـ نتیجهٔ ۱ـ محور اصلی دو دایرهٔ غیر متقاطع ، مکان هندسی نقاطی است که از آن نقاط ، می‌توان مماسهای متساوی بر دو دایره رسم کرد ؛ و در دو دایرهٔ متقاطع ، از هر نقطهٔ محور اصلی که خارج دو دایره واقع باشد ، می‌توان مماسهای متساوی بر دو دایره رسم کرد (به چه دلیل ؟) .

نتیجهٔ ۲ ـ قسمتی از محوراصلی دو دایرهٔ متقاطع که در داخل دو دایره قرار دارد ، مکان هندسی نقاطی است که از آن نقاط ، می‌توان دو وتر متساوی و به‌طول مینیمم در دو دایره رسم کرد (به چه دلیل ؟) .

نتیجهٔ ۳ ـ محور اصلی دو دایره ، مماسهای مشترك دو دایره را نصف می‌کند (چرا ؟) .

این نتیجه ، راهی عملی برای رسم محور اصلی دو دایرهٔ متخارج بدست می‌دهد .

۷ ـ تعریف ـ هرگاه از یك نقطهٔ P دو مماس PT و PT' را بر دایرهٔ O رسم کنیم (شکل ۶) ، خط Δ را که بر وسط PT و PT'

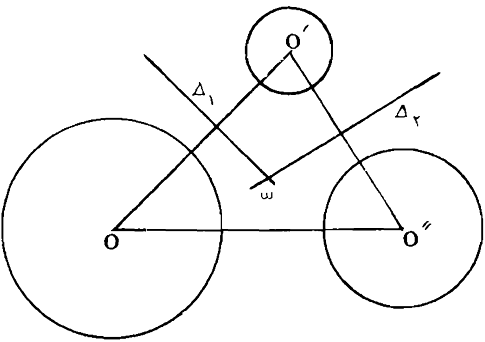


شکل ۶

می‌گذرد ، **محور اصلی نقطهٔ P و دایرهٔ O** می‌نامیم . زیرا که هر نقطه را می‌توان دایره‌ای به شعاع صفر دانست .

ج - مرکز اصلی سه دایره

۸ - قضیه - محورهای اصلی سه دایره که مرکزهای آنها بر یك امتداد نباشند در یك نقطه متقاربند .



شکل ۷

این نقطه را **مرکز اصلی** سه‌دایره می‌گویند .

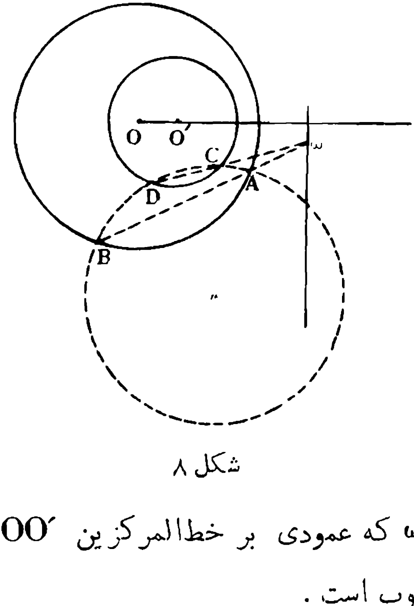
برهان - Δ_1 محور اصلی O و O´ و Δ_2 محور اصلی O´ و O" همدیگر را در ω قطع می‌کنند (شکل ۷) ، زیرا که این دو خط بر دوخط متقاطع OO´ و O´O" عمودند ونمی‌توانند با یکدیگر موازی شوند . اگرقوت ω را نسبت به دایرهٔ O مساوی **p** فرض کنیم ، قوت آن نسبت به O´ نیز **p** است و چون ω بر روی Δ_2 است قوتش نسبت به O" نیز **p** می‌شود . پس قوت ω نسبت به O و O" یکی است

و در نتیجه بر محور اصلی دو دایرهٔ اخیر قرار دارد . پس محور اصلی O و O" هم بر ω می‌گذرد .

نتیجه ـ وقتی که نقطهٔ ω ، مرکز اصلی سه‌دایره ، بیرون از آن دوایر باشد، مماسهایی‌که از نقطهٔ ω بر سه دایره رسم شوند ، متساویند ؛ و چنانچه ω درون سه دایره باشد ، سه وتر به‌طول مینیمم که از نقطهٔ ω در سه دایره رسم شوند ، با هم برابرند (چرا ؟) .

۹ـ وجود مرکز اصلی برای سه دایره که مرکزهایشان بر یك امتداد نباشند ، راه عملی ساده‌ای برای رسم محور اصلی دو دایره ، بخصوص دو دایرهٔ متخارج و یا متداخل ، بدست می‌دهد .

مثلاً برای رسم محور اصلی دو دایره مانند O و ´O (شکل ۸) ، دایرهٔ سومی رسم می‌کنیم که مرکزش روی ´OO نباشد و هر دو دایره را قطع‌کند .

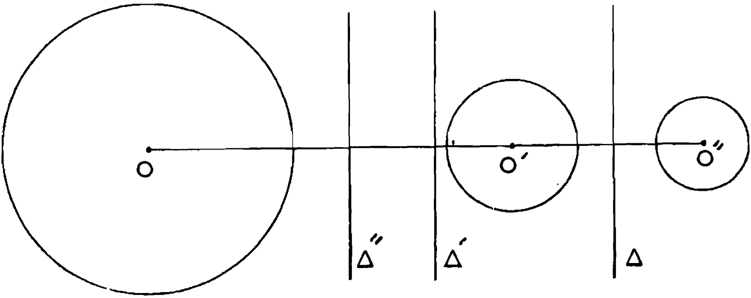


شکل ۸

اکنون سه‌دایره‌داریم که رسم دو محور اصلی‌آنها خیلی ساده است ، زیرا که دو دایره متقاطعند ؛ پس محورهای اصلی (وترهای مشترك) AB و CD را رسم می‌کنیم تا درω تقاطع‌کنند؛ از ω که عمودی بر خط‌المرکزین ´OO فرود آوریم ، **محور** اصلی مطلوب است .

۱۰- هرگاه مرکزهای سه دایره بر یك امتداد باشند ، دو حالت اتفاق می‌افتد :

حالت اول - سه دایره دوبدو دارای محورهای اصلی متمایزند ، مانند دایره‌های O ، ′O و ″O در شکل ۹ ، که در آن Δ محور اصلی ″O و ′O و ′Δ محور اصلی ″O و O و ″Δ محور اصلی O و

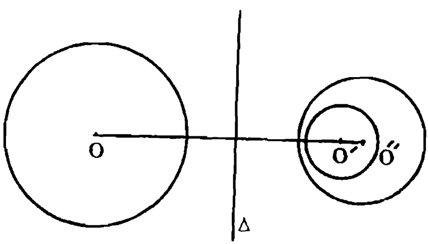


شکل ۹

′O است .

اینگونه دایره‌ها مرکز اصلی ندارند . ممکن است گفته شود که مرکز اصلی آنها نقطه‌ای است بینهایت دور .

حالت دوم - محورهای اصلی سه دایره دو بدو بر هم منطبقند ، یعنی سه دایره دارای یك محوراصلی مشترکند، مانند دایره‌های شکل۱۰ . بدیهی است که در این صورت ، بینهایت نقطه یافت می‌شود



شکل ۱۰

که نسبت به هر سه دایره هم‌قوتند .

۱۱- پس هرگاه سه دایره را در نظر بگیریم :

- یا فقط یك نقطه می‌توان یافت که نسبت به آنها هم‌قوت باشد ، در این صورت مرکزهای سه دایره بر یك امتداد نیستند .

- یا هیچ نقطه‌ای نمی‌توان یافت که نسبت به سه دایره هم‌قوت باشد ، در این صورت مرکزهای سه دایره بر یك امتدادند .

- یا بیشتر از یك نقطه می‌توان یافت که نسبت به سه‌دایره هم‌قوت باشند ، در این صورت نیز مرکزها بر یك امتدادند .

از حالت سوم گاهی برای اثبات اینکه سه نقطه بر یك استقامتند استفاده‌می‌شود . به این ترتیب که وقتی که بخواهند ثابت‌کنندکه سه نقطه روی یك خط قرار دارند ، ثابت می‌کنند که این نقاط مرکزهای سه دایره‌ای، هستندکه بیشتراز یك نقطه می‌توان یافت‌که نسبت به‌آنها دارای یك قوت باشند .

ما در مبحث چهارضلعی کامل از این خاصیت استفاده‌خواهیم‌کرد.

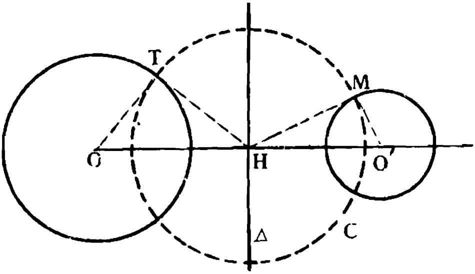
د - دستگاه دوایر

۱۲- تعریف- دستگاه دوایر یا **دستهٔ دوایر** به دایره‌هایی گفته می‌شود که همگی آنها دارای یك محور اصلی مشترك باشند .

۱۳-مسئله- دایرهٔ O،یکی از دوایر دستگاهی ، با Δ ، محوراصلی

مشترك دستگاه ، داده شده است ؛ سایر دوایر دستگاه را مشخص کنید . (شکل ۱۱) .

حل- می‌دانیم که مراکز دوایر مطلوب ، روی عمودی هستند که از O بر Δ رسم شود ؛ این عمود، Δ را در H قطع می‌کند ؛ پس اگر Δ دایرهٔ O را قطع نکند ، از H مماس HT را بر دایرهٔ O رسم می‌کنیم و به مرکز H و شعاع HT دایره‌ای می‌کشیم و آن را C می‌نامیم؛

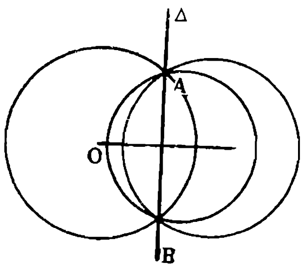


شکل ۱۱

حال اگر از هر نقطهٔ دلخواه M واقع بر دایرهٔ C عمودی برشعاع HM رسم‌کنیم تا امتداد OH را در O′ قطع کند ، دایره‌ای که به مرکز O′ وشعاع O′M رسم شود ، یکی از دوایرمطلوب است ؛ زیراکه Δ محور اصلی آن دایره با دایرهٔ O است (قوت H نسبت به دو دایرهٔ O و O′ برابر $HM^۲$ و $HT^۲$ است) .

تعداد دوایر این دستگاه بیشمار است و در دو طرف خط Δ قرار دارند . دوایری که در یك طرف Δ قرار دارند ، متداخلند .

درصورتی که خط Δ دایرهٔ O را در دونقطهٔ A و B قطع کند (شکل ۱۲) ، تمام‌دوایر دستگاه بر A و B می‌گذرند .



شکل ۱۲

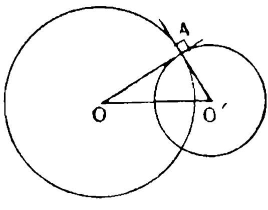
در حالت مخصوص که Δ در نقطه‌ای بردایرهٔ O مماس باشد همهٔ دایره‌های دستگاه در همان نقطه بر یکدیگر مماسند .

هـ - دوایر عمود بر هم

۱۴ - تعریف - زاویهٔ بین دومنحنی ، زاویهٔ بین مماسهای مرسوم بر آنها در نقطهٔ تقاطعشان است . اگر این زاویه قائمه باشد ، می‌گوییم که دو منحنی در نقطهٔ تقاطع خود بر هم عمودند .

زاویهٔ بین یك خط راست و یك منحنی ، زاویهٔ آن خط است با مماسی که در نقطهٔ تقاطع خط و منحنی برآن منحنی رسم شده باشد .

۱۵ - دایره‌های عمود بر هم - مطابق تعریف، دایره‌های عمود برهم ، دوایری هستندکه مماسهای نقطهٔ تقاطعشان برهم عمود باشند (شکل۱۳).



شکل ۱۳

توجه کنید ! می‌دانیم‌که دودایرهٔ متقاطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند ؛ اگر در یکی از این دونقطه، مماسها بر هم عمود باشند ، در نقطهٔ دیگر نیز مماسها بر هم عمودند (چرا ؟) .

۱۶ - قضیه - در دو دایرهٔ عمود بر هم :

I - شعاعهای نقطهٔ تقاطع ، بر هم عمودند .

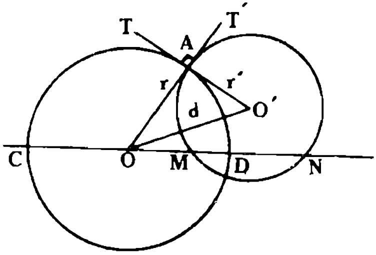
II - در نقطهٔ تقاطع ، شعاع هر دایره بر دایرهٔ دیگر مماس است .

III- مربع خطالمرکزین مساوی است با مجموع مربعهای دو شعاع .

IV- قوت مرکزهر دایره نسبت به دایرهٔ دیگر، مساویاست با مربع شعاع همان دایره .

V- هر قطر یك دایره به وسیلهٔ دایرهٔ دیگر بهنسبت توافقی تقسیم میشود .

فرض این است که AT و AT' مماسهای دو دایرهٔ O و O' در نقطهٔ تقاطعشان بر هم عمودند ، یعنی $AT \perp AT'$ (شکل ۱۴) .



شکل ۱۴

برهان - I - میدانیم که اگر خطی بردایرهای مماس باشد، شعاع مارّبر نقطهٔ تماس عمود است برخط مماس ؛ پس $OA \perp AT$ و $O'A \perp AT'$ ؛ و بنا بر فرض، AT' و AT نیز بر هم عمودند ؛ بنابراین در حول نقطهٔ A چهار زاویه تشکیل شده است که سهتای آنها یعنی OAT ، $O'AT'$ و TAT' قائمهاند ، پس چهارمی نیز قائمه است یعنی $OA \perp O'A$.

II- OA و AT' هر دو عمودند بر AT . پس بر امتداد یکدیگرند، یعنی OA مماس است بردایرهٔ O' .

III- اگر طول خطالمرکزین، OO' ، را d وشعاعهای دو دایره را r و r' فرضکنیم ، در مثلث قائمالزاویهٔ OAO' چنین خواهیمداشت:

$$d^2 = r^2 + r'^2$$

IV- بنابر همین رابطهٔ اخیر مربع مماس OA قوت نقطهٔ O است نسبت به دایرهٔ O' . همچنیناست برای قوت نقطهٔ O' نسبت بهدایرهٔ O .

V ـ قطر غیرمشخص CD از دایرهٔ O دایرهٔ ´O را در M و N قطع می‌کند . $\overline{OM} \times \overline{ON}$ قوت‌نقطهٔ O است نسبت به دایرهٔ ´O ، پس:

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = r^2 = OC^2$$

یعنی (به موجب رابطهٔ ۴ ازشمارهٔ ۸ فصل سوم) M و N نسبت به C و D مزدوج توافقی یکدیگرند ، یا به عبارت دیگر M و N قطر CD را به‌نسبت توافقی تقسیم‌کرده‌اند .

۱۷ ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه در دو دایرهٔ متقاطع یکی از خواص زیر برقرار باشد دو دایره بر هم عمودند :

I ـ شعاعهای نقطهٔ تقاطع برهم عمود باشند .

II ـ در نقطهٔ تقاطع شعاع یکی بر دیگری مماس باشد .

III ـ مربع خط‌المرکزین مساوی مجموع مربعهای دوشعاع دو دایره باشد .

IV ـ قوت‌مرکز یکی نسبت به دیگری، مساوی مربع‌شعاع‌خودش‌باشد.

V ـ هرقطر ازیکی ، به وسیلهٔ دیگری ، به‌نسبت توافقی تقسیم شود .

اثبات این قضیه را بر عهدهٔ دانش‌آموزان می‌گذاریم .

۱۸ ـ دوایر عمود بر دو دایرهٔ مفروض ـ هرگاه دایره‌ای بر دو دایره عمود باشد ، مرکز آن نسبت به دو دایره هم‌قوت است (خاصیت چهارم دوایر عمود برهم) ، یعنی واقع است بر محور اصلی آن دو دایره. بعکس هر نقطه از محور اصلی را که از آنجا بتوان بر دو دایره مماس رسم کرد می‌توان مرکز یك دایرهٔ عمود بر دو دایره گرفت ، بنابراین :

محوراصلی دو دایره (یا قسمتی ازآن) مکان هندسی مراکز دوایری است که بر هر دو دایره عمود باشند .

نتیجهٔ ۱ - فقط یك دایره می‌توان یافت که بر سه دایره عمود باشد. مرکز این دایره مرکز اصلی دوایر مفروض و شعاع آن برابر طول مماسی است که از مرکز اصلی بر یکی از آن سه دایره رسم شود.

نتیجهٔ ۲ - دوایر بیشمار می‌توان رسم کرد که بر تمام دایره های یك دستگاه عمود باشند.

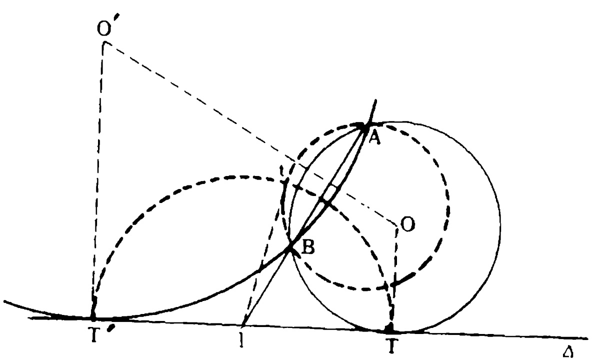
و - دو مسئلهٔ مهم

۱۹- مسئلهٔ اول- می‌خواهیم دایره‌ای رسم‌کنیم‌که بر دو نقطهٔ معین مرورکند و برخط مفروضی مماس باشد.

حل- دو نقطهٔ A و B و خط Δ داده شده است (شکل ۱۵). می‌خواهیم دایره‌ای از A و B بگذرانیم که بر Δ مماس باشد.

اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و O دایرهٔ مطلوب و T نقطهٔ تماس آن با Δ و I نقطهٔ برخورد AB با Δ باشد، قوت نقطهٔ I نسبت به O برابر است با:

$$\overline{IT}^2=\overline{IA}.\overline{IB}$$



شکل ۱۵

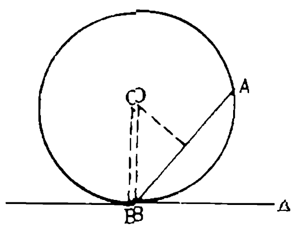
چون دو طول IA و IB معلومند از اینجا طول IT و در نتیجه نقطهٔ T بدست می‌آید و مرکز دایرهٔ مطلوب از طرفی واقع است برعمودی

که از T بر Δ اخراج شود و از طرف دیگر واقع است بر عمود منصف AB .

طول IT را می‌توان از راه ترسیم بدست آورد ، به این ترتیب‌که بر A و B دایرهٔ دلخواهی می‌گذرانیم و از I مماس It را بر آن رسم می‌کنیم، چون $It^2=IA.IB$ ،طول It با IT مساوی است وکافی است که از نقطهٔ I طول It را بر Δ نقل کنیم تا T بدست آید .

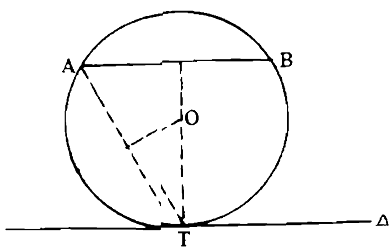
بحث - هرگاه A و B در یك طرف خط Δ باشند و AB خط Δ را قطع کند مسئله دو جواب دارد ، زیرا که طول It را می‌توان در دو طرف I نقل کرد تا دو نقطهٔ T و T' بدست آیند (شکل ۱۵) .

اگریکی ازدو نقطه، مثلاً B ، برروی خط Δ باشد (شکل ۱۶) ، خود نقطهٔ B نقطهٔ تماس دایرهٔ مطلوب با Δ است و مسئله فقط یك جواب دارد . مرکز دایرهٔ مطلوب محل تقاطع عمود منصف AB است با عمودی که‌از B بر Δ اخراج شود.



شکل ۱۶

چنانچه AB با Δ موازی باشد (شکل ۱۷) ، T نقطهٔ تماس Δ با دایرهٔ مطلوب، محل تقاطع Δ با عمود منصف AB است و فقط یك دایره‌جواب‌مسئله است که‌مرکزش محل تلاقی عمود منصف AT با عمودمنصف AB است .



شکل ۱۷

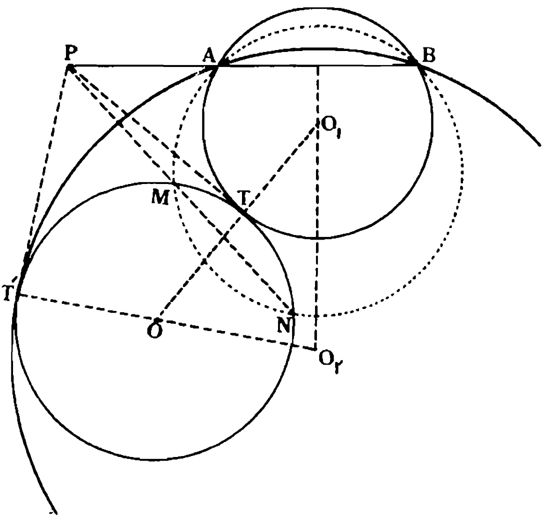
بالاخره اگر A و B دردو طرف Δ باشندمسئله جواب ندارد.

۲۰- مسئلهٔ دوم- می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر دو نقطهٔ معین بگذرد و بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد.

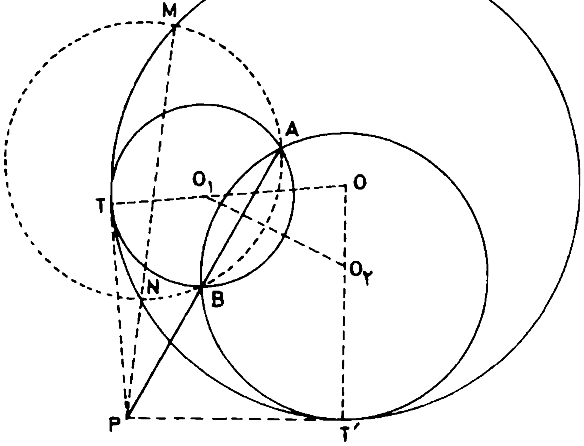
حل- دو نقطهٔ A و B درخارج یاداخل دایرهٔ O (شکل ۱۸-الف یا ب) مفروضند، می‌خواهیم دایره‌ای براین دو نقطه بگذرانیم که بردایرهٔ O مماس شود. بر A و B دایرهٔ دلخواهی می‌گذرانیم تا دایرهٔ O را در M و N قطع کند. وتر مشترك یعنی MN را امتداد می‌دهیم تا امتداد AB را در P قطع کند. از P دو مماس PT و PT′ را بر دایرهٔ O رسم می‌کنیم؛ چون:

$$PT'^{2}=PT^{2}=PM\cdot PN=PA.PB$$

دایره‌ای که بر A ، B و T یا A ، B و T′ بگذرد در T یا T′ بر دایرهٔ O مماس خواهد بود (نتیجهٔ شمارهٔ ۳ از همین فصل) ، یعنی دایرهٔ مطلوب است . مرکز این دایره واقع است بر محل تلاقی عمود منصف AB با امتداد شعاع OT یا OT′ .



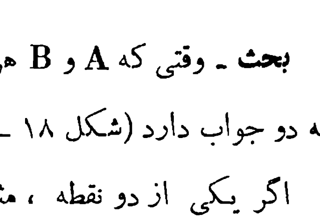
شکل ۱۸ - الف



شکل ۱۸ ـ ب

بحث ـ وقتی که A و B هردو درخارج یا داخل دایرهٔ O باشند، مسئله دو جواب دارد (شکل ۱۸ ـ الف یا ب) .

اگر یکی از دو نقطه ، مثلاً B ، روی دایرهٔ O باشد (شکل ۱۹) ، دایرهٔ مطلوب در همان نقطهٔ B بر دایرهٔ O مماس خواهد بود و مرکزش محل برخورد عمودمنصف AB با امتداد OB است . در این حال مسئله فقط یك جواب دارد .



شکل ۱۹

هرگاه یکی از دو نقطه داخل دایرهٔ O و دیگری خارج آن باشد ، هر دایره‌که بر آن دو بگذرد دایرهٔ O را قطع می‌کند و مسئله دارای جواب نیست .

تمرین

۱- مطلوب است مکان هندسی نقاطی‌که قوتشان نسبت به دایرهٔ مفروضی l باشد.

۲- بر روی خط مفروض AB ، نقطهٔ M را چنان پیداکنیدکه‌مربع فاصلهٔ آن از نقطهٔ مفروض O مساوی $MA \cdot MB$ باشد.

۳ - نقطه‌های A ، B و C مفروضند. بر B و C دایره‌ای چنان بگذرانید که اگر از A مماس AT را بر آن رسم کنیم $AT = l$ باشد.

۴ - بر روی خط یا دایرهٔ مفروض نقطه‌ای بدست آورید که قوت آن نسبت به دایرهٔ مفروضی مساوی مقدارمعین p باشد.

۵- دایره‌ای رسم کنید که بر نقطهٔ A بگذرد و بر دایرهٔ مفروض C عمود باشد. در تعداد جوابها بحث کنید. با چه شرطی عدهٔ جوابها محدود خواهد شد؟

۶-دایره‌ای رسم‌کنید که بر دو نقطهٔ معین بگذرد و بر دایرهٔ مفروضی عمود باشد.

۷ - دایره‌ای رسم کنید که بر یك نقطهٔ معین بگذرد و بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد.

۸- دایره‌ای به شعاع معین l رسم کنید که بر دو دایره عمود باشد.

۹- خط Δ ودو دایرهٔ C و C' مفروضند. بر Δ نقطه‌ای بدست‌آورید که بتوان از آن، دو مماس متساوی بر دو دایره رسم کرد.

۱۰- چهار نقطهٔ A ، B ، C و D بریك استقامتند. بر A و B یك دایرهٔ متغیر و بر C و D دایرهٔ متغیر دیگری می‌گذرانیم. ثابت کنید که محوراصلی این دو دایره همیشه بر نقطهٔ ثابتی مرور می‌کند.

۱۱ - سه نقطهٔ M ، N و P مفروضند. دایره‌ای چنان رسم کنید که اگر از M ، N و P سه مماس : MM' ، NN' و PP' بر آن رسم‌کنیم طولهای آنها بترتیب مساوی m ، n و l شود.

۱۲ - دو دایرهٔ C و C' مفروضند. Δ محور اصلی آنها را بدست

می‌آوریم و C'' قرینهٔ C' را نسبت به آن رسم می‌کنیم . ثابت‌کنیدکه هر سه دایره جزء یك دسته‌اند .

۱۳ ــ مرکز اصلی سه دایره را که اقطار آنها ضلعهای مثلث مفروضی باشند بدست آورید .

۱۴ ــ بر نقطهٔ مفروض ، دایره‌ای به شعاع R بگذرانید که بر دایرهٔ مفروضی عمود باشد .

۱۵ــ دایره‌ای رسم‌کنیدکه سه دایرهٔ مفروض را به زاویهٔ‌قائمه قطع‌کند.

۱۶ــ B و C دو نقطهٔ ثابت و D وسط آنهاست . A نقطهٔ متحرکی است که بر روی خط معینی ، عمود بر BC تغییر مکان می‌دهد . نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث ABC را H می‌نامیم و A را در M بر روی DH تصویر می‌کنیم . مکان هندسی M چیست ؟

۱۷ــ دایرهٔ O و نقطهٔ A بر این دایره و B نقطه‌ای از شعاع OA مفروضند . قاطع متحرکی که بر B می‌گذرد دایره را در M و M' قطع می‌کند . دو خط AM و AM' عمودی را که از B بر AB اخراج شود در P و P' قطع می‌کنند . ثابت‌کنید که $BP \times BP'$ مقداری است ثابت .

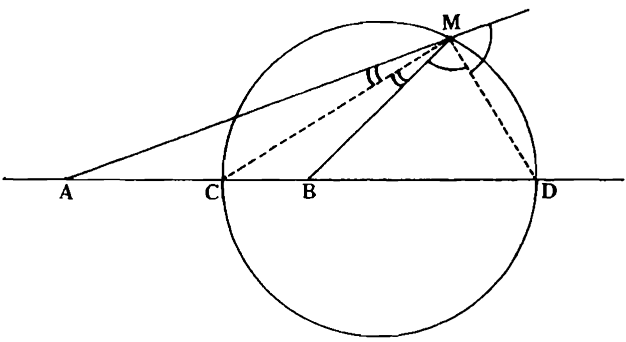
فصل پنجم

قطب و قطبی

الف ـ مقدمه

۱ ـ قضیه ـ مکان هندسی نقاطی که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت A و B مساوی عدد ثابت k باشد، دایره‌ای است که دو انتهای قطر آن پاره‌خط AB را به‌نسبت k تقسیم می‌کنند.

برهان ـ فرض کنیم که M یکی از نقاط مطلوب باشد (شکل ۱)، یعنی $\frac{MA}{MB}=k$. از M به A و B وصل می‌کنیم و در مثلث AMB نیمسازهای داخلی و خارجی رأس M را می‌کشیم تا ضلع مقابل را در C و D قطع کنند. چون نیمساز زاویهٔ داخلی یا خارجی هر مثلث ضلع



شکل ۱

مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، داریم :

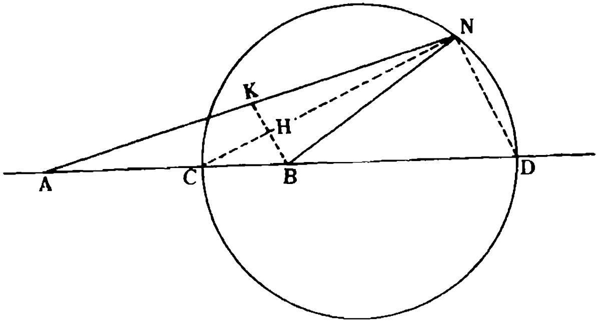
$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB} \quad \text{و} \quad \frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MB}$$

یا :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MB}=k$$

یعنی C و D پاره‌خط AB را به‌نسبت توافقی به‌نسبت k تقسیم می‌کنند. اما چون $\widehat{CMD}$ قائمه است، CD قطردایره‌ای است که بر M می‌گذرد، یعنی هر نقطه مانند M که در رابطهٔ $\frac{MA}{MB}=k$ صدق کند، روی دایره‌ای است به قطر CD .

اکنون ثابت می‌کنیم که هر نقطه مانند N (شکل۲) از دایرهٔ مذکور هم در رابطهٔ $\frac{NA}{NB}=k$ صدق می‌کند. درحقیقت اولاً چون N یك نقطه ازدایرهٔ مذکورفرض می‌شود، $NC \perp ND$؛ وثانیاً دستگاه $(N-ABCD)$ توافقی است .ازاین‌دوخاصیت نتیجه‌می‌گیریم که NC و ND نیمسازهای زاویهٔ N از مثلث ANB می‌باشند ، زیرا اگر از B خط BHK را



شکل ۲

به‌موازات ND رسم‌کنیم، ازطرفی به‌سبب توافقی بودن دستگاه، طولهای

BH و HK متساوی خواهند بود وازطرف دیگر، BK که موازی ND است برNH عمود است . پس‌چون در مثلث NBK خط NH برقاعده عمود و آن را نصف‌کرده است ، این مثلث متساوی‌الساقین است و عمود-منصف قاعده نیمساز زاویهٔ رأس نیزهست ، یعنی NC نیمساز زاویهٔ N از مثلث ANB است و به موجب خاصیت نیمساز داریم :

$$\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}=k$$

ب - موربها

۲ - تعریف - هر خط‌که چند خط دیگررا قطع‌کند **مورّب** نام دارد . بخصوص به هر خطی‌که اضلاع‌مثلثی ، یا امتداد آنها را قطع‌کند نام مورّب اطلاق می‌شود .

نقطهٔ تلاقی مورب با اضلاع AB ، BC و CA از مثلث ABC را بترتیب C' ، A' و B' می‌نامیم . بطورکلی هر یك از این نقطه‌ها را روی ضلعی ازمثلث‌که برآن نقطه می‌گذرد مبدأمشترك دوبردار می‌گیریم که منتهای آنها دورأس‌آن ضلع باشند. مثلاً نقطهٔ C' را روی ضلع AB مبدأ $\overrightarrow{C'A}$ و $\overrightarrow{C'B}$ اختیار می‌کنیم . علامت **نسبت** اندازه‌های جبری هر دو بردارکه به این ترتیب‌روی هرضلع می‌گیریم، (مثلاً علامت $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$) ، به جهتی‌که روی آن ضلع انتخاب می‌کنیم بستگی ندارد . زیرا اگر دو

بردار هم‌جهت نباشند ، یعنی اگر نقطهٔ برخورد روی خود ضلع باشد ، این نسبت منفی است ؛ و اگر دو بردار متحدالجهت باشند ، یعنی نقطهٔ برخورد روی امتداد ضلع باشد ، این نسبت مثبت است .

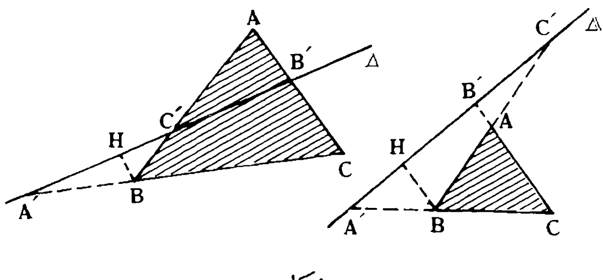
۳ ـ قضیهٔ منلائوس (Ménélaüs) ـ اگر A' ، B' و C' بترتیب نقاط تلاقی یك خط راست Δ (یك مورّب) با اضلاع BC ، CA و AB از مثلث ABC باشند، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \times \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = 1 \qquad (1)$$

برهان ـ برای اثبات درستی تساوی (۱) ، اولاً ثابت می‌کنیم که طرف اول این تساوی همیشه مثبت است و ثانیاً قدر مطلق آن برابر ۱ است .

اولاً ـ از دوحال خارج نیست ، یا مورّب Δ امتداد هر سه ضلع را قطع می‌کند (شکل ۳ ، راست) یا امتداد یکی از سه ضلع و خود دو ضلع دیگر را (شکل ۳ ، چپ) .

در حالت اول ، هرسه‌نسبت طرف اول تساوی (۱) مثبت‌است و در حالت دوم ، یك نسبت مثبت و دو نسبت دیگر منفی است . پس در هر



شکل ۳ .

دوحال‌حاصل ضرب سه نسبت طرف‌اول تساوی (۱) مثبت است.

ثانیاً – برای اثبات اینکه حاصل ضرب قدر مطلقهای سه نسبت طرف اول تساوی (۱) برابر واحد است ، از $\mathbf{B}$ خطی موازی $\mathbf{AC}$ رسم می‌کنیم تا Δ را در $\mathbf{H}$ قطع کند .

در دو مثلث متشابه $\mathbf{A'BH}$ و $\mathbf{A'CB'}$ ،

$$\frac{A'C}{A'B}=\frac{B'C}{HB} \qquad (۲)$$

و در دو مثلث متشابه $\mathbf{C'BH}$ و $\mathbf{C'AB'}$ ،

$$\frac{C'B}{C'A}=\frac{HB}{B'A} \qquad (۳)$$

حال اگر طرفین رابطه‌های (۲) و (۳) رادرهم ضرب‌کنیم ، چنین خواهیم داشت :

$$\frac{A'C}{A'B}\times\frac{C'B}{C'A}=\frac{B'C}{B'A} \qquad (۴)$$

اینك دو طرف تساوی (۴) را در عکس طرف دوم آن (یعنی در $\frac{B'A}{B'C}$) ضرب می‌کنیم تا بدست آید :

$$\frac{A'C}{A'B}\times\frac{C'B}{C'A}\times\frac{B'A}{B'C}=1$$

رابطهٔ (۱) را **رابطهٔ منلائوس** می‌نامند .

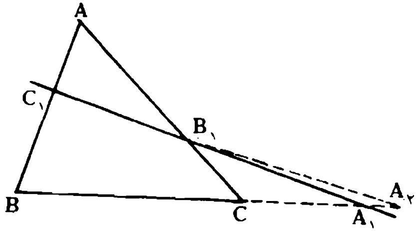
۴ـ قضیهٔ عکس ـ اگر سه نقطهٔ $\mathbf{A_1}$ ، $\mathbf{B_1}$ و $\mathbf{C_1}$ (شکل۴) بترتیب روی اضلاع $\mathbf{BC}$ ، $\mathbf{CA}$ و $\mathbf{AB}$ از مثلث $\mathbf{ABC}$ (یا روی امتداد اضلاع)

بقسمی باشند که رابطهٔ منلائوس برقرار باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$(۱) \qquad \frac{\overline{B_۱A}}{\overline{B_۱C}} \times \frac{\overline{A_۱C}}{\overline{A_۱B}} \times \frac{\overline{C_۱B}}{\overline{C_۱A}} = ۱$$

آن سه نقطه بر یك استقامتند .

برهان ـ از $B_۱$ به $C_۱$ وصل می‌کنیم وامتدادمی‌دهیم. اگر این خط بر $A_۱$ نگذرد ، BC را در نقطه‌ای مانند $A_۲$ قطع می‌کند، و به‌موجب قضیهٔ منلائوس خواهیم داشت :



شکل ۴

$$(۲) \qquad \frac{\overline{B_۱A}}{\overline{B_۱C}} \times \frac{\overline{A_۲C}}{\overline{A_۲B}} \times \frac{\overline{C_۱B}}{\overline{C_۱A}} = ۱$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{\overline{A_۲C}}{\overline{A_۲B}} = \frac{\overline{A_۱C}}{\overline{A_۱B}} = k$$

اما می‌دانیم که روی خط BC ، فقط یك نقطه می‌توان یافت که نسبت اندازه‌های جبری فواصل آن از C و B برابر عدد جبری k باشد (شمارهٔ ۳ از فصل سوم)، پس $A_۲$ بر $A_۱$ منطبق است یعنی $A_۱$ روی خط $B_۱C_۱$ قرار دارد .

۵ ـ قضیهٔ پاسکال ـ درهر شش‌ضلعی محاطی ضلعهای اول و چهارم یکدیگر را در نقطه‌ای مانند α ، و ضلعهای دوم و پنجم یکدیگر را در نقطه‌ای مانند β ، و ضلعهای سوم و ششم یکدیگر را درنقطه‌ای مانند γ

قطع می‌کنند که هر سه بر یك استقامتند .

برهان ـ در شش ضلعی محاطی، محدب یا مقعر (شکل۵)، باسه ضلع متناوب،مثلاً اول وسوم وپنجم، مثلث MNP را می‌سازیم وضلعهای دیگر را سه مورب فرض کرده رابطهٔ منلائوس را در آنها می‌نویسیم :

مورّب ۲ ، اضلاع مثلث را در B ، C و β قطع می‌کند ، پس :

$$\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\beta P}}\cdot\frac{\overline{CP}}{\overline{CN}}\cdot\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}}=1 \qquad (1)$$

مورب ۴ ، اضلاع مثلث را در E ، D و α قطع می‌کند ، پس :

$$\frac{\overline{\alpha N}}{\overline{\alpha M}}\cdot\frac{\overline{EM}}{\overline{EP}}\cdot\frac{\overline{DP}}{\overline{DN}}=1 \qquad (2)$$

مورب ۶ ، اضلاع مثلث را در A ، F و γ قطع می‌کند ، پس :

$$\frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma N}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}\cdot\frac{\overline{FM}}{\overline{FP}}=1 \qquad (3)$$

حال این سه رابطه را در هم ضرب می‌کنیم و صورت و مخرج حاصل ضرب را با توجه به اینکه :

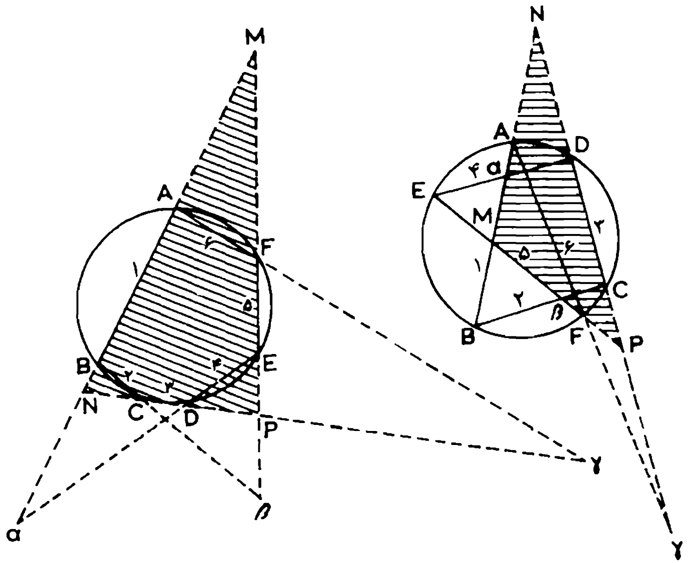
$\overline{PE}\cdot\overline{PF}=\overline{PD}\cdot\overline{PC}$ (قوت نقطهٔ P نسبت به دایره)

و $\overline{NC}\cdot\overline{ND}=\overline{NB}\cdot\overline{NA}$ (قوت نقطهٔ N نسبت به دایره)

و $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MF}\cdot\overline{ME}$ (قوت نقطهٔ M نسبت به دایره)

می‌باشد ساده می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$\frac{\overline{\alpha N}}{\overline{\alpha M}}\cdot\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\beta P}}\cdot\frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma N}}=1$$



شکل ۵

ازاینجامعلوم می‌شودکه α ، β و γ ، براضلاع (یا امتداداضلاع) مثلث MNP ، بقسمی قرارگرفته‌اندکه رابطهٔ منلائوس برقراراست، پس بر یك استقامتند .

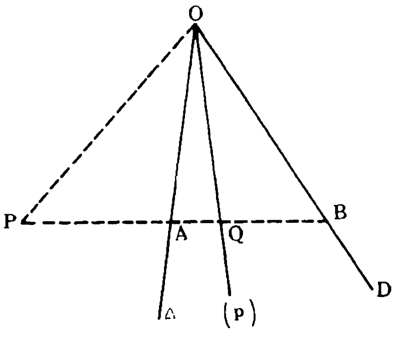
ج ـ قطب و قطبی نسبت به دو خط متقاطع

۶ـ تعریف ـ قطبی نقطه‌ای مانند P (شکل ۶) نسبت به دوخط Δ و D ، عبارت است از مکان هندسی مزدوج توافقی نقطهٔ P نسبت به نقاط تقاطع Δ و D با خط غیرمشخصی که بر P بگذرد .

P را **قطب** این مکان می‌نامند .

۷ ـ قضیه ـ قطبی هر نقطه نسبت به دوخط متقاطع D و Δ خط

راستی است که بر O ، نقطهٔ تقاطع آن دو خط ، می‌گذرد .



شکل ۶

برهان ـ از P (شکل۶) خطی رسم می‌کنیم تا خطهای Δ و D را در A و B قطع کند و Q مزدوج P را نسبت به A و B بدست می‌آوریم . دستگاه (O-PQAB) توافقی است و هر خط که آن را قطع کند به نسبت توافقی تقسیم می‌شود. بخصوص مزدوج P نسبت به نقاط تقاطع Δ و D با هر خط که بر P بگذرد روی OQ قرار دارد . از طرفی هر نقطه مانند M از خط OQ مزدوج توافقی P است نسبت به نقاط تقاطع PM با D و Δ ، زیرا که دستگاه (O-PQAB) توافقی است؛ پس OQ قطبی P است نسبت به Δ و D .

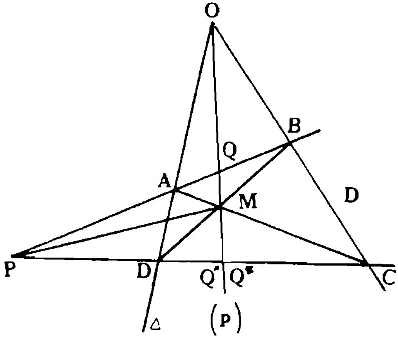
۸ ـ نتیجه ـ قطبی هر نقطه نسبت به دو خط متوازی ، با آنها موازی است .

۹ ـ قرارداد ـ قطبی هر نقطه را با همان حرف ، ولی کوچك ، نام می‌گذاریم. مثلاً خط (p) قطبی نقطهٔ P است، همچنانکه نقطهٔ P قطب خط (p) است .

۱۰ـقضیه ـ هرگاه از نقطه‌ای مانند P (شکل ۷) ، دو خط رسم کنیم تا دو خط مفروض Δ و D را در چهار نقطهٔ A ، B ، C و D قطع کنند ، نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعی ABCD ، بر قطبی P نسبت به دو

خط D و Δ واقع است .

برهان ـ خط (p) قطبی P را نسبت به Δ و D بدست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که بر M می‌گذرد . می‌دانیم که نقطهٔ Q و نقطهٔ ´Q ، نقاط برخورد (p) با دوقاطع ، مزدوجهای توافقی P نسبت به نقاط تقاطع قاطعها با Δ و D هستند . حال می‌گوییم که اگر خط (p) بر نقطهٔ M نگذرد، چنانچه از Q به M وصل کنیم و امتداد دهیم تا قاطع PDC



شکل ۷

را در "Q قطع کند ، ازآنجاکه دستگاه (M-PQAB) توافقی است و قاطع PDC آن رادر P، D ، "Q و C قطع کرده‌است، "Q باید مزدوج توافقی P نسبت به D و C باشد ، یعنی باید بر ´Q منطبق باشد . پس QM بر ´Q می‌گذرد ، یعنی بر (p) منطبق است یا به عبارت دیگر ، (p) از M می‌گذرد .

۱۱ـ با استفاده ازقضیهٔ بالا راه حل ساده‌ای برای ترسیم قطبی هر نقطه نسبت به دو خط بدست می‌آید .

د ـ قطب و قطبی نسبت به دایره

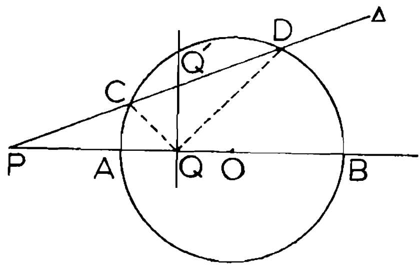
۱۲ ـ تعریف ـ قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ O مکان هندسی

مزدوجهای توافقی P است نسبت به نقاط تقاطع دایره باهرخط غیرمشخصی که بر P بگذرد.

P را **قطب** مکان مذکور می‌نامند.

۱۳-قضیه - قطبی‌هر نقطه نسبت به یك دایره خطی است مستقیم، عمود برقطری که از آن نقطه می‌گذرد.

برهان - دایرهٔ O و نقطهٔ P مفروضند (شکل ۸). قطری که



بر P گذشته، دایره را در A و B قطع کرده است و Q مزدوج توافقی P را نسبت به A و B بدست‌آورده‌ایم. حال از نقطهٔ P قاطع غیرمشخصی مانند Δ رسم می‌کنیم تا دایره را در C و D قطع کند و Q' مزدوج P را نسبت به C و D بدست می‌آوریم. مطابق تعریف، Q' و Q روی قطبی نقطهٔ P قرار دارند اگر ثابت‌کنیم که QQ' بر AB عمود است، قضیه ثابت می‌شود. چون A و B پاره خط PQ را به نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند و C و D بر روی دایره‌ای به قطر AB واقعند، بنا به قضیهٔ شمارهٔ ۱ همین فصل:

$$\frac{CP}{CQ}=\frac{AP}{AQ} \quad (۱) \qquad \text{و} \qquad \frac{DP}{DQ}=\frac{AP}{AQ} \quad (۲)$$

پس:

$$\frac{CP}{CQ}=\frac{DP}{DQ}$$

و پس از عوض کردن جای دو وسط :

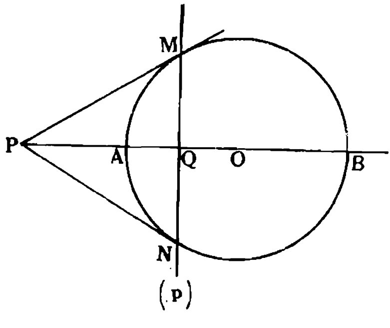
$$\frac{CP}{DP}=\frac{CQ}{DQ}$$

یا :
$$\frac{QC}{QD}=\frac{PC}{PD}=\frac{Q'C}{Q'D} \qquad (۳)$$

(زیرا که Q' مزدوج توافقی P است نسبت به C و D)

از رابطهٔ (۳) ، نتیجه می‌گیریم که درمثلث CQD دو خط QP و QQ' ضلع CD را به نسبت دوضلع دیگر تقسیم کرده‌اند، پس نیمسازهای داخلی و خارجی مثلثند ، و بر هم عمودند ، یعنی QQ' عمود است بر AB .

۱۴ ـ نتیجه ـ چون مماس حد قاطع است ، مماسهایی که از نقطهٔ P بردایره رسم شوند در نقطهٔ تماس ، قطبی نقطهٔ P را قطع می‌کنند (شکل۹).



شکل ۹

۱۵ـ نتیجه ـ بین OP ، فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ P ، و OQ ، فاصلهٔ مرکز دایره از قطبی P این رابطه برقرار است :

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ}=R^2$$

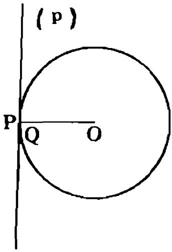
از این رابطه نتیجه می‌شود که :

ـ اگر داشته باشیم : $OP>R$ ، داریم : $OQ<R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که خارج دایره باشد ، دایره را قطع می‌کند (شکل ۹) .

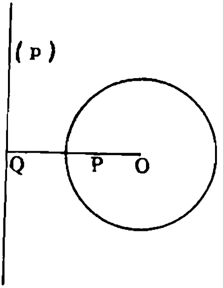
ـ اگر داشته باشیم :

$OP=R$، داریم: $OQ=R$؛

یعنی قطبی هر نقطه که روی دایره باشد، درهمان نقطه بر دایره مماس است(شکل۱۰).



شکل ۱۰



شکل ۱۱

ـ اگر داشته باشیم :

$OP<R$ ، داریم : $OQ>R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که داخل دایره باشد ، در خارج دایره واقع است (شکل ۱۱) .

باید توجه داشت‌که درحالت اول ، یعنی وقتی که P خارج دایره باشد (شکل ۹) ، فقط جزء MN از خط نامحدود (p) در تعریف قطبی صادق است ، یعنی مکان مزدوجهای توافقی P است .

درحالت دوم ، یعنی وقتی‌که P بر روی دایره است (شکل ۱۰) ، فقط نقطهٔ P در تعریف قطبی صادق است .

درحالت سوم، تمام نقاط خط (p) در تعریف قطبی صدق‌می‌کنند.

با وجود این ، در حالتهای اول و دوم هم ، با مسامحه در لفظ ، تمام خط (p) را قطبی P می‌گویند .

بنا برآنچه‌گذشت ، اگردایره‌ای به مرکز O وشعاع R و نقطه‌ای مانند P وخطی مانند (p) چنان باشندکه (p) بر OP عمود باشد وآن را در Q قطع‌کند و $\overline{OP}\,.\,\overline{OQ}=R^2$ باشد، خط (p) را قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ مذکور و نقطهٔ P را قطب خط (p) نسبت به همان دایره

می‌نامیم .

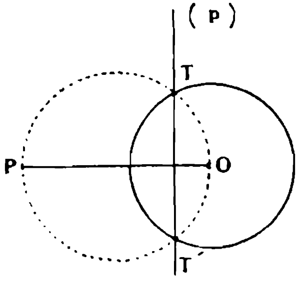
تبصره - ازرابطهٔ $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R^2$ معلوم می‌شودکه بردارهای OP و OQ متحدالجهتند و در نتیجه قطبی هر نقطه نسبت به یك دایره با خود آن نقطه همیشه یك طرف مرکز دایره قرار دارند .

درزنص **۱۶ - مسئله - قطبی P را نسبت به دایرهٔ O رسم کنید .**

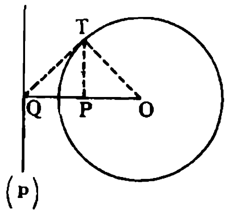
حل : اولاً P خارج دایره است (شکل ۱۲) ؛ دایره‌ای به قطر OP رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در دو نقطهٔ T و T' قطع‌کند ؛ این دو نقطه، نقاط تماس مماسهای مرسوم از نقطهٔ P بردایرهٔ O هستند (چرا؟)؛ پس TT' قطبی P نسبت به دایرهٔ O است (چرا ؟) .

ثانیاً P روی دایره است ؛ مماس بر دایره در P را رسم می‌کنیم.

ثالثاً P داخل دایره است؛ ازآن، عمودی‌بر OP اخراج‌می‌کنیم تا دایره را در T قطع‌کند (شکل ۱۳) ؛ در نقطهٔ T مماسی بردایره رسم می‌کنیم تا امتداد OP را در Q قطع کند ؛ از Q خط (p) را بر OQ عمود می‌کنیم .



شکل ۱۲



شکل ۱۳

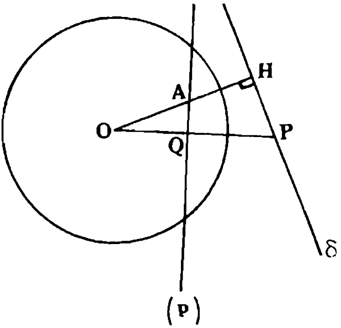
تمرین ـ قطب خط (p) را نسبت به دایرهٔ O بدست آورید.

۱۷ ـ قضیه ـ قطبهای تمام خطهایی‌که بر یك نقطه می‌گذرند، بر قطبی این نقطه قرار دارند.

برهان ـ نقطهٔ P و قطبی آن (p) نسبت به دایرهٔ O مفروضند (شکل ۱۴)؛ خط غیرمشخص δ را بر P می‌گذرانیم وثابت می‌کنیم که قطب آن روی (p) است؛ اگر از O عمودی بر δ فرود آوریم تا آن را در H و (p) را در A قطع کند، چهارضلعی $AHPQ$ محاطی است و داریم:

$$OA \cdot OH = OQ \cdot OP = R^2;$$

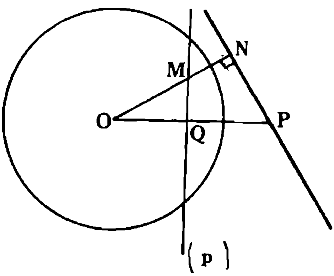
یعنی (به موجب نتیجهٔ شمارهٔ ۱۵ همین فصل) A قطب δ است.



شکل ۱۴

۱۸ ـ قضیهٔ عکس ـ قطبهای تمام نقاطی‌که روی یك خط باشند، بر قطب این خط می‌گذرند، یعنی متقاربند.

برهان ـ خط (p) و قطب آن P نسبت به دایرهٔ O مفروضند (شکل۱۵)؛ نقطه‌ای مانند M بر روی (p) اختیار می‌کنیم و از P عمود PN را بر OM فرود می‌آوریم؛ چون چهارضلعی $QMNP$ محاطی است، داریم:



شکل ۱۵

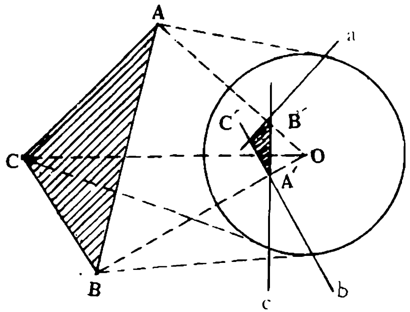
$$OM \cdot ON = OQ \cdot OP = R^2;$$

یعنی خط PN قطبی نقطهٔ M است .

۱۹ - نتیجه : I - خطی‌که قطبهای دوخط را به هم مربوط سازد ، قطبی نقطهٔ تقاطع آن دو خط است .

II - نقطهٔ تقاطع دو خط ، قطب خطی است‌که قطبهای آن دو خط را به هم مربوط کنند .

۲۰ - تبدیل به وسیلهٔ قطب و قطبی - هرگاه یك چند ضلعی ...ABC را در نظر گرفته (a) ، (b) ، (c) و . . . . قطبیهای رئوس آن را نسبت به دایره‌ای بدست آوریم (شکل ۱۶) ، چندضلعی دیگری بدست می‌آید که اضلاع متوالی آن ، (a) ،



شکل ۱۶

(b) ، (c) و . . . است ؛ واضح است که تعداد رئوس و اضلاع این دو چند ضلعی با هم مساوی است ؛ می‌گوییم شکل اول را به وسیلهٔ قطب و قطبی به شکل دوم تبدیل کرده‌ایم . چون (چنانکه ذیلاً ثابت خواهیم کرد) در این دو چندضلعی ، هررأس یکی، قطب یك ضلع از دیگری ، و هر ضلع یکی ، قطبی یك رأس از دیگری است ، دو شکل را **قطبی متقابل** می‌نامند . گاهی دو شکل را **قطبی‌معکوس** نیز می‌خوانند .

۲۱ - قضیه - در دو شکل قطبی متقابل ، هر رأس یکی قطب یك ضلع دیگری ، و هر ضلع یکی قطبی یك رأس دیگری است .

برهان - اولاً بنا به فرض، هرضلع ازشکل دوم ، منطبق برقطبی

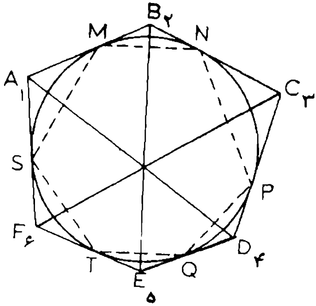
یك رأس از شکل اول است . ثانیاً چون (a) را قطبی A و (b) را قطبی B ساخته‌ایم (شکل۱۶) ، ´C نقطهٔ تقاطع (a) و (b) ، قطب خطی است که بر A و B می‌گذرد ، یعنی ´C قطب ضلع AB است . به‌همین ترتیب ، هر رأس شکل دوم ، قطب یکی از اضلاع شکل اول می‌شود ؛ به عبارت دیگر ، هر ضلع شکل اول ، قطبی یکی از رئوس شکل دوم است .

۲۲- استفاده از قطب وقطبی در اثبات قضایا وحل مسائل- گاهی برای اثبات اینکه چند خط متقاربند ، یا چند نقطه بر یك خط راست قرار دارند ، از قطب و قطبی استفاده می‌شود ؛ بدین شرح که اگر بخواهیم ثابت کنیم که چند نقطه بر یك استقامتند ، ثابت می‌کنیم که قطبیهای آنها بر یك نقطه می‌گذرند ؛ یا اگر بخواهیم ثابت‌کنیم که چند خط متقاربند ، ثابت می‌کنیم‌که قطبهای آنها بر یك استقامتند .

مثال ۱ - قضیهٔ بریانشن (۱) - درهرشش‌ضلعی محیطی قطرهایی که رأس اول را به رأس چهارم و رأس دوم را به رأس پنجم و رأس سوم را به رأس ششم مربوط سازند ، بر یك نقطه می‌گذرند .

برهان - رئوس شش ضلعی محیطی ABCDEF (شکل ۱۷) را بترتیب از ۱ تا ۶ ، شماره می‌گذاریم ونقاط تماس اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا شش ضلعی محاطی MNPQTS بدست آید ؛ هرگاه قطبهای اقطار A_1D_4 ، B_2E_5 و C_3F_6 بریك امتداد باشند، اقطارمذکورمتقارب

Brianchon - ۱



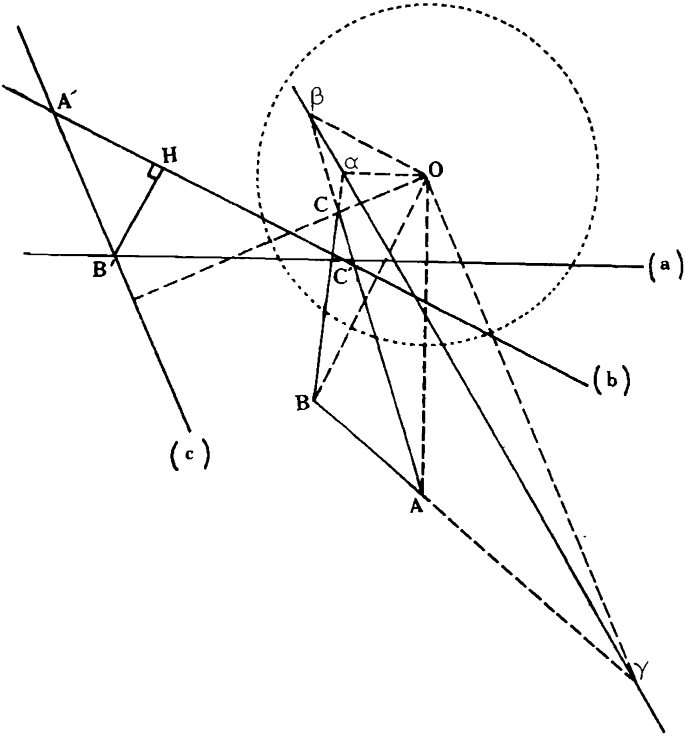
شکل ۱۷

خواهند بود . قطر A_1D_4 را در نظر می‌گیریم ؛ این خط ، چون بر A_1 می‌گذرد ، قطبش واقع است بر قطبی A_1 یعنی برامتداد MS ، و چون بر D_4 می‌گذرد ، قطبش واقع است بر قطبی D_4 ، یعنی بر امتداد PQ ، پس قطب قطر A_1D_4 ازشش‌ضلعی محیطی، محل تلاقی‌اضلاع اول و چهارم شش‌ضلعی محاطی $MNPQTS$ است‌که‌آن را α می‌نامیم ؛ به همین ترتیب ، ثابت می‌شود که قطب قطر B_2E_5 ، محل تلاقی اضلاع دوم و پنجم از شش ضلعی محاطی مذکور است که آن را β می‌نامیم ؛ و قطب قطر C_3F_6 ، محل تلاقی دوضلع سوم وششم همان شش‌ضلعی‌محاطی است که آن را γ می‌نامیم ؛ اما در قضیهٔ پاسکال ثابت شده است که α ، β و γ بر یك استقامتند ؛ پس A_1D_4 و B_2E_5 و C_3F_6 متقاربند .

مثال۲ـ قضیه ـ هرگاه ازیك نقطهٔ واقع درصفحهٔ مثلثی به سه‌رأس مثلث وصل‌کنیم و ازآن نقطه برخط واصل به هر رأس ، عمودی‌اخراج‌کنیم و امتداد دهیم تا ضلع مقابل به آن رأس را در نقطه‌ای قطع‌کند ،سه نقطه‌ای که به این ترتیب بدست می‌آیند ، بر یك استقامتند .

برهان ـ مثلث ABC و نقطهٔ O مفروضند (شکل ۱۸) ؛ از O به A وصل‌کرده و خطی از O بر OA عمود می‌کنیم تا BC یا امتدادآن را در α قطع کند؛ به طریق مشابه ، β و γ رابدست می‌آوریم؛ حال‌باید

ثابت کنیم که α ،β و γ بر یك استقامتند .



شکل ۱۸

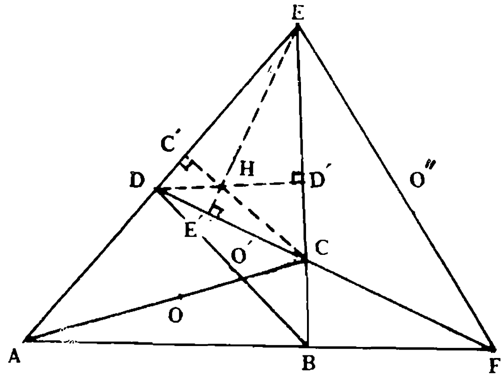
به مرکز O دایره‌ای به شعاع اختیاری می‌کشیم و A′B′C′ شکل قطبی متقابلABC را نسبت به دایرهٔ O بدست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که هر یك از نقاط α ، β و γ قطب یکی از ارتفاعهای مثلث A′B′C′ است ، ودرنتیجه ،چون سه ارتفاع متقاربند ، α ، β و γ بریك‌استقامت خواهند بود .

از طرفی یکی از ارتفاعهای مثلث A′B′C′ ، مثلاً ارتفاع رأس

B′ ، را در نظر می‌گیریم ؛ قطب این ارتفاع که موازی با OB است (چرا ؟) بر قطبی B′ یعنی بر AC واقع است ؛ و از طرف دیگر، قطب هر خط بر روی عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم شود ، یعنی قطب ارتفاع B′H واقع است بر روی خطی که از O بر B′H ، یا بر OB عمود شود ؛ پس β قطب ارتفاع رأس B′ از مثلث A′B′C′ است ؛ همینطور ثابت می‌شود که α و γ قطبهای ارتفاعات رأسهای A′ و C′ آن مثلثند و قضیه ثابت است .

هـ - چهارضلعی کامل

۲۳ - تعریف - هرگاه اضلاع متقابل یك چهارضلعی غیرمشخص مانند ABCD (شکل ۱۹) را دو بدو امتداد دهیم تا یکدیگر رادر E و F قطع کنند، شکل حادث را **چهار ضلعی کامل** می‌نامند .



شکل ۱۹

چهارضلعی کامل، دارای شش رأس A ، B ، C ، D ، E و F و چهارضلع ABF ، BCE ، DCF و ADE و سه قطر AC ، BD و EF است .

۲۴ ـ قضیه ـ اوساط اقطار چهارضلعی کامل ، سه نقطهٔ واقع بر یك استقامتند .

برهان ـ اثبات این قضیه را به‌دو راه بیان می‌کنیم :

راه اول ـ ثابت می‌کنیم که نقاط O ، ´O و "O ، اوساط اقطار چهارضلعی کامل (شکل ۱۹) ، مراکز سه دایره‌اندکه بیشتر از یك نقطه می‌توان یافت که نسبت به آنها دارای یك قوت باشد ؛ این سه دایره عبارتند از دوایری به قطرهای AC ، BD و EF ، و نقاطی‌که نسبت به آنهادارای‌یك قوتند عبارتنداز نقاط تلاقی‌ارتفاعهای چهار مثلث EDC، CBF ، EAB و FDA .

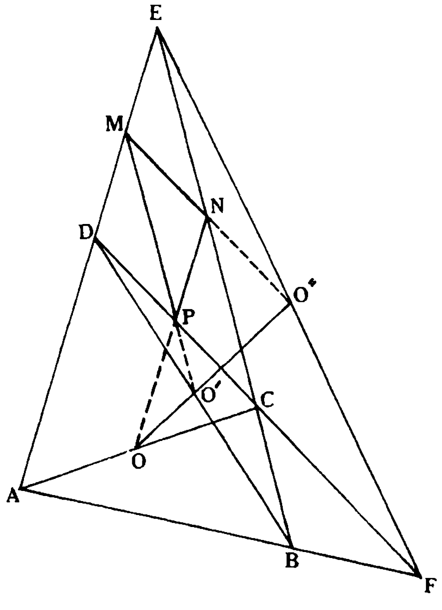
کافی است که یکی از این مثلثها را بدلخواه انتخاب کنیم وحکم را درمورد نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای آن مثلث ثابت‌کنیم . مثلاً مثلثDEC را در نظرمی‌گیریم وارتفاعهای ´EE ، ´DD و ´CC آن را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در H قطع کنند .

از تشابه مثلثهای ´HC´E و HE´C از یك طرف ، و از تشابه مثلثهای HE´D و HD´E ازطرف دیگر، تساویهای زیر نتیجه می‌شود:

$$HE.HE' = HC.HC' = HD.HD' \qquad (۱)$$

اما ´E بر روی دایرهٔ به قطر EF است و ´HE.HE قوت نقطهٔ H نسبت به این دایره است ؛ و نیز ´C روی دایرهٔ به قطر AC است و ´HC.HC قوت H نسبت به این دایره است ؛ و بالاخره ´D روی دایرهٔ به‌قطر DB است و ´HD.HD قوت H نسبت به‌این دایره است؛ پس، از

تساویهای ۱ معلوم می‌شود که H ، نسبت به سه دایره به مرکزهای O ، ´O و "O دارای یك قوت است . به‌همین ترتیب ، نقاط تلاقی ارتفاعهای مثلثهای دیگر نیز نسبت به همین سه دایره دارای یك قوتند ؛ بنابراین ، نقاط O ، ´O و "O بر یك امتداد قرار دارند .



شکل ۲۰

راه دوم- دراین‌اثبات ، ازموربها استفاده می‌کنیم ؛ به این‌ترتیب که M ، N وP ، اوساط اضلاع مثلث EDC (شکل ۲۰) را به‌هم وصل کرده و ثابت می‌کنیم‌که :

اولا- هریك از سه ضلع مثلث MNP بر وسط یکی از قطرهای

چهارضلعی کامل می‌گذرد .

ثانیاً- بین نقاط وسط قطرهای چهارضلعی ورأسهای مثلث MNP، شش بردار بوجود می‌آید که رابطهٔ منلائوس بین اندازه‌های جبری آنها برقرار است ، وازآن نتیجه می‌گیریم که وسطهای قطرها بریك استقامتند.

درمثلث EDC خط MN که بروسط دو ضلع می‌گذرد، موازی با DC است ؛ درمثلث EDF خط MN که ازوسط یك ضلع، موازی باضلع دیگر رسم شده بروسط ضلع سوم ، یعنی بر O'' می‌گذرد ؛ همچنین NP بر O و MP بر O' می‌گذرند .

پس ، از حیث قدرمطلق و علامت داریم :

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{O'P}}{\overline{O'M}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{O''M}}{\overline{O''N}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{FC}}$$

بنابراین :

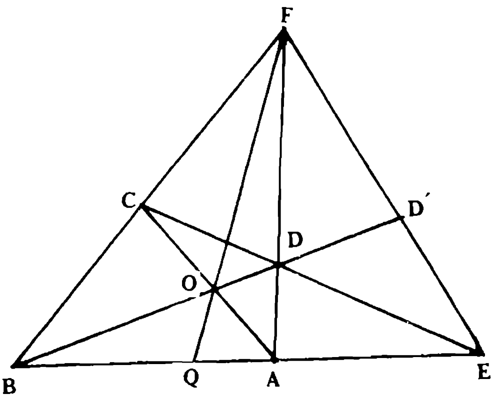
$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{O'P}}{\overline{O'M}} \cdot \frac{\overline{O''M}}{\overline{O''N}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$$

با توجه به اینکه نقاط A ، B و F برامتداد اضلاع مثلث DEC هستند و خود بر یك خط راست قرار دارند ، طرف دوم این رابطه مساوی ۱ است ، پس طرف اول نیز مساوی ۱ ، و قضیه ثابت است .

۲۵ ـ قضیه ـ در چهارضلعی کامل ، هرقطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود .

برهان ـ در حقیقت خطی که محل تلاقی دو قطر AC و BD

را به رأس F وصل کند (شکل ۲۱) ، قطبی نقطهٔ E نسبت به دو خط FA و FB است (چرا ؟) ، پس دستگاه $(F-EQAB)$ توافقی است و قطر BD که این دستگاه را قطع می‌کند ، به نسبت توافقی تقسیم می‌شود .



شکل ۲۱

تمرین

۱- $\overrightarrow{R}$ را به دو بردار $\overrightarrow{V}_1$ و $\overrightarrow{V}_2$ تجزیه کنید که نسبت طولهای آنها مساوی عدد مثبت k و زاویهٔ بینشان α باشد .

۲- دایره‌ای به قطر AB مفروض است ؛ از نقطهٔ M واقع بر امتداد AB خط Δ را بر این قطرعمود می‌کنیم و ازنقطهٔ غیرمشخص N واقع برمحیط دایره به A و B وصل می‌کنیم تا Δ را بترتیب در P و Q قطع کنند ؛ اگر N' نقطهٔ دوم تقاطع AQ با دایره باشد ، از A خطی بر NN' عمود می‌کنیم تا آن را در H قطع کند ؛ مکان نقطهٔ H چیست ؟

۳- ضلع AB از مثلث غیر مشخص ABC وامتدادآن را محوری می‌انگاریم که مبدأش نقطهٔ A و جهت مثبتش اختیاری باشد ؛ روی این محور دو نقطهٔ E و F را به طولهای $\overline{AE}=m\cdot\overline{AB}$ و $\overline{AF}=n\cdot\overline{AB}$ اختیار

می‌کنیم (m و n اعدادی جبری و معلومند) ؛ نقطهٔ دلخواه D را نیز در صفحهٔ ABC اختیارکرده محل برخورد دوخط نامحدود DE و DF را با ضلع AC (یا امتداد آن) بترتیب G و H می‌نامیم ؛ دو خط EH و FG (یا امتداد آنها) یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که آن را به I نمایش می‌دهیم : خط DI (یا امتدادآن) با محور AB در نقطه‌ای تلاقی می‌کند که آن را K می‌نامیم .

اولاً ـ ثابت کنید : $\overline{EK}=\frac{m(n-m)}{n+m}\cdot\overline{AB}$

ثانیاً ـ با فرض : $m=\frac{۱}{۴}$ و $n=-\frac{۳}{۴}$ ، تحقیق کنید که

$$۲\overline{KF}+۳\overline{AB}=۰$$

۴ ـ نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت به دو دایرهٔ مفروض دارای یك قطبی باشد .

۵ ـ دایره‌ای برنقطهٔ مفروض A بگذرانید که قطبی نقطهٔ معین B نسبت به‌آن ، خط مفروض d باشد .

۶ ـ دایره‌ای به شعاع R رسم کنید که نقطهٔ مفروض A و خط مفروض (a) نسبت به آن قطب و قطبی باشند .

۷ ـ دو نقطهٔ ثابت A و B و دایره‌ای داده شده است . بر A خطی بگذرانید تا دایره را در M و N قطع کند ؛ BM و BN بار دیگر دایره را در M' و N' تلاقی می‌کنند . ثابت کنید که $M'N'$ بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

۸ ـ ثابت کنید که نسبت فواصل دونقطه از مرکز دایره‌ای ، مساوی است با نسبت فاصله‌های هر نقطه از قطبی نقطهٔ دیگر .

۹ ـ خاصیت متقارب بودن میانه‌های مثلثی را به وسیلهٔ تعیین قطبی متقابل آن نسبت به دایرهٔ محیطی آن مورد مطالعه قرار دهید .

۱۰ ـ این خاصیت را ، که هرقطر چهار ضلعی‌کامل به وسیلهٔ دوقطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود ، با قطبی متقابل تبدیل کنید .

۱۱ ـ دایرهٔ ثابت O و نقطهٔ ثابت A داده شده است . ثابت کنید که دوایری که بر A بگذرند و بر دایرهٔ O عمود باشند ، برنقطهٔ ثابتی می‌گذرند .

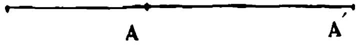
۱۲ ـ دایرهٔ ثابت O و نقطهٔ ثابت A بر روی آن دایره مفروض است . BC وتری از این دایره است که همواره به موازات خود تغییر مکان می‌دهد . ثابت کنید که قطبی نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث ABC همواره برنقطهٔ ثابتی می‌گذرد . مکان این نقطهٔ ثابت را وقتی که A روی دایره تغییر مکان دهد بدست آورید .

فصل ششم

تجانس

۱ ـ **تعریف** ـ هرگاه نقطهٔ ثابتی مانند S و یك عدد ثابت جبری مانند k (جز صفر) داشته باشیم، **مجانس هر نقطه مانند A نسبت به مرکز تجانس S با نسبت تجانس k نقطه‌ای است مانند ´A که با A و S بر یك امتداد باشد و نسبت اندازه‌های جبری فواصل S از ´A و A برابر k باشد، یعنی داشته باشیم :**

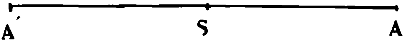
$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=k$$



شکل ۱

چنانکه اشاره شد، S را **مرکز تجانس** و k را **نسبت تجانس** می‌نامند.

اگر k مثبت باشد، نقطهٔ مفروض و مجانس آن در یك طرف مرکز تجانس می‌باشند (شکل ۱)، و اگر k منفی باشد، در دو طرف آن (شکل ۲). وقتی که $k>0$ تجانس را



شکل ۲

مستقیم یا مثبت وهنگامی‌که $k<0$، آن را **معکوس** یامنفی می‌نامند.

چنانچه $k=1$ باشد، A' بر A منطبق است و در ازای $k=-1$

نقطهٔ A' قرینهٔ A است نسبت به S.

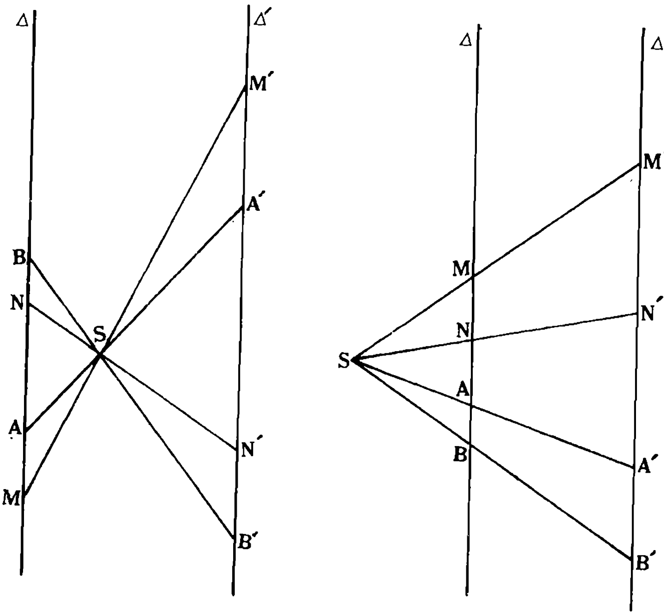
تعریف - مجانس یك شكل، شكلی است‌که هر نقطه‌اش مجانس یك نقطهٔ آن شكل باشد، به عبارت دیگر:

مجانس هر شكل مكان هندسی‌مجانسهای نقاط آن شكل است.

در دو شكل متجانس، هر دو جزء متجانس را متناظر گویند.

۲ - قضیه - مجانس خط راست، خط راستی است موازی با آن.

برهان - نقطهٔ S مرکز، و k نسبت تجانس، و خط Δ مفروضند (شکل ۳)؛ A' و B' مجانسهای دو نقطهٔ A و B را یافته به هم وصل



شکل ۳

می‌کنیم تا خط راست Δ' بدست آید؛ ثابت می‌کنیم که Δ' مجانس Δ است، یعنی مجانس هر نقطه مانند $\mathbf{M}$ از خط Δ روی Δ' واقع است.

از تساویهای $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=k$ و $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}=k$

تساوی زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}$$

از این تساوی معلوم می‌شود که خط $\mathbf{A'B'}$ یعنی Δ' موازی با خط $\mathbf{AB}$ یا Δ می‌باشد.

حال اگر $\mathbf{M}$ نقطه‌ای دیگر از خط Δ و $\mathbf{M'}$ مجانس آن باشد، به همین ترتیب ثابت می‌کنیم که باید $\mathbf{A'M'}$ موازی با $\mathbf{AM}$ یعنی موازی با Δ باشد و چون از $\mathbf{A'}$ بیش از یك خط به موازات Δ نمی‌توان رسم کرد، $\mathbf{A'M'}$ منطبق بر Δ' یعنی $\mathbf{M'}$، مجانس $\mathbf{M}$، روی Δ' است.

می‌توان بسهولت ثابت کرد که بعکس، هر نقطه مانند $\mathbf{N'}$ از خط Δ' مجانس یك نقطهٔ $\mathbf{N}$ از خط Δ است ($\mathbf{N}$ نقطهٔ تلاقی خط Δ با خط $\mathbf{SN'}$ است).

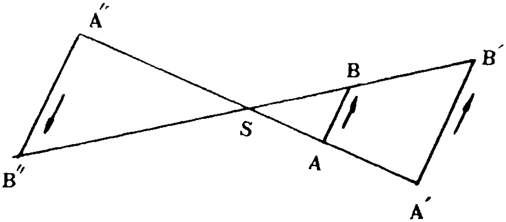
اگر نقطهٔ $\mathbf{S}$ (مرکز تجانس) روی Δ واقع باشد، Δ' بر Δ منطبق است.

برعکس، هردوخط راست متوازی Δ و Δ' را همواره می‌توان متجانس

دانست . در این صورت ، مرکز تجانس نقطهٔ دلخواهی است مانند S که روی هیچیك از آنها واقع نباشد . (نسبت تجانس چیست ؟)

نتیجهٔ ۱ ـ مجانس هر پاره‌خط ، پاره‌خط دیگری است که نسبت اندازه‌اش به اندازهٔ آن پاره خط ، مساوی قدرمطلق نسبت تجانس است .

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=|k|$$

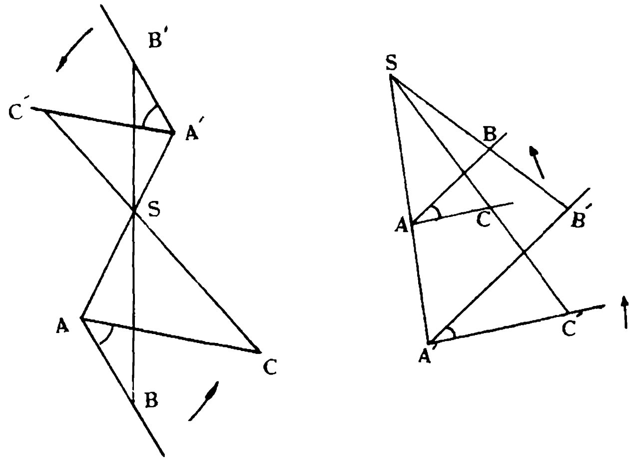


شکل ۴

نتیجهٔ۲ـ مجانس مستقیم هر بردار ، برداری‌است موازی و هم‌جهت با آن و **مجانس‌معکوس** هر بردار ، برداری موازی و در جهت مخالف آن است (شکل ۴) .

۳ ـ قضیه ـ مجانس هر زاویه زاویه‌ای است مساوی و هم جهت با آن .

برهان ـ چنانچه در تجانسی زاویهٔ A' از زاویهٔ A نتیجه شده باشد، اضلاع متناظراین دو زاویه با هم موازیند پس دو زاویه برابرند . در تجانس مستقیم، اضلاع موازی و هم‌جهت ودر تجانس معکوس،موازی و غیر هم‌جهتند ولی در هر حال ، جهت زوایای A و A' یکی است (شکل ۵) .



شکل ۵

۴ ـ قضیه ـ مجانس هر چندضلعی، چندضلعیی است که اضلاعش با اضلاع آن بر نسبت $|k|$ و زوایایش با زوایای آن مساویند.

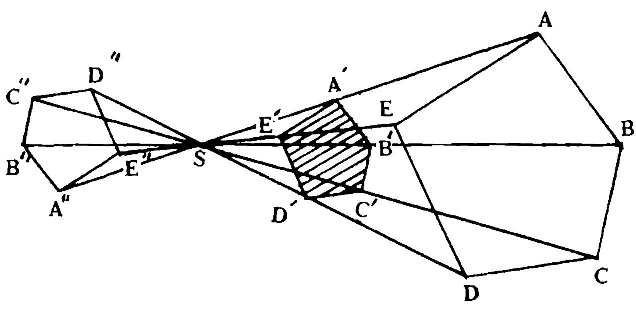
برهان ـ می‌دانیم که (شکل ۶) :

$$\frac{A'B'}{AB}=|k| \quad \text{و} \quad \frac{B'C'}{BC}=|k| \quad \text{و} \ \ldots$$

پس :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\ldots=|k|$$

و نیز می‌دانیم که : $\hat{A}'=\hat{A}$ و $\hat{B}'=\hat{B}$ و ...



شکل ۶

نتیجه ـ اگر $A'B'C'...$ مجانس $ABC....$ با نسبت k باشد، $ABC...$ نیز مجانس $A'B'C'...$ است، اما با نسبت $\frac{1}{k}$ ؛ زیراکه :

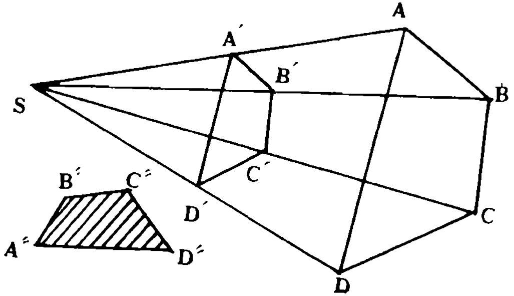
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=....=\left|\frac{1}{k}\right|$$

۵ ـ یادآوری ـ می‌دانیم‌که هرگاه در دو شکل، اضلاع متناظر متناسب و زوایای متناظر متساوی باشند ، دو شکل را متشابه می‌نامند ؛ پس قضیه‌ای راکه‌گفتیم می‌توان به این صورت بیان کرد :

مجانس هرشکل ، شکلی است مشابه باآن‌که‌اضلاع متناظرشان متوازی باشند .

۶ ـ تعریف جدیدی برای چندضلعیهای متشابه ـ هرگاه $A'B'C'D'$مجانس $ABCD$ باشد و"$A"B"C"D$رامساوی$A'B'C'D'$ بسازیم ، "$A"B"C"D$ با $ABCD$ مشابه خواهد بود (شکل ۷) ؛ پس :

شکل مشابه هر چندضلعی ، چندضلعیی است مساوی با یکی از



شکل ۷

مجانسهای آن . نسبت بین دو ضلع متناظر را **نسبت تشابه** می‌نامند .

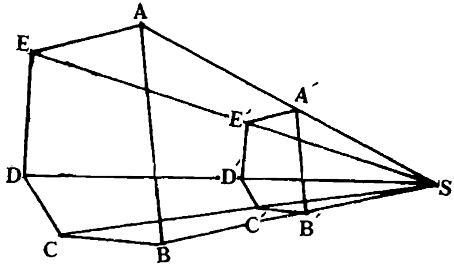
به این ترتیب ، برای ساختن شکلی مشابه با یك چندضلعی (که مجانس آن نباشد)، کافی است که مجانس چندضلعی را نسبت به یك مرکز اختیاری رسم کرده سپس آن را در صفحه جابجا کنیم .

۷ ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه در دو شکل متشابه ، اضلاع متناظر متوازی باشند، دو شکل مجانس یکدیگرند . یعنی خطوط واصل بین رأسهای متناظر آنها همه بر یك نقطه می‌گذرند .

برهان ـ فرض این است که در شکل ۸ :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\dots=k$$

$$A'B' \parallel AB \text{ و } B'C' \parallel BC \text{ و } \dots$$



شکل ۸

برای سهولت بیان، فرض می‌کنیم که اضلاع متناظر متحدالجهت باشند؛ در این صورت ، **اگر** امتداد AA' و EE' همدیگر را در S قطع کنند ، A و A' دریك طرف S خواهند بود ؛ همچنین S خارج قطعه‌خط EE' است و داریم :

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SE}{SE'}=\frac{AE}{A'E'}=k$$

حال اگر یکی دیگر از خطوط واصل بین دو رأس متناظر، مثلاً DD'، امتداد EE' را در S' قطع کند، S' خارج قطعه‌خط EE' خواهد بود و داریم:

$$\frac{S'E}{S'E'}=\frac{ED}{E'D'}=k$$

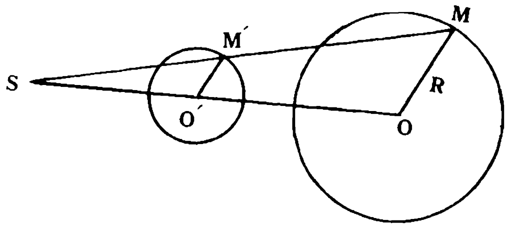
ازاینجا لازم می‌آید که $\frac{S'E}{S'E'}=\frac{SE}{SE'}=k$ باشد، و چون در خارج قطعه‌خط EE' بیش از یك نقطه وجود ندارد که آن را به نسبت k تقسیم کند، لزوماً S' بر S منطبق است؛ بدین ترتیب، می‌بینیم که جمیع خطوط AA' ، BB' ، CC' و . . . . بریك نقطه می‌گذرند؛ از طرف دیگر، $\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$ مثبت و برابر $\frac{SA}{SA'}$ یعنی برابر k است؛ پس A مجانس A' است در تجانسی که مرکزش S و نسبتش k باشد.

به همین ترتیب، دربارهٔ نقاط دیگر می‌توان استدلال کرد و نتیجه گرفت که ... ABC مجانس ... $A'B'C'$ است.

اگر اضلاع متناظر، مختلف‌الجهت باشند، نقطهٔ S بین A و A' خواهد بود و شکل . . . ABC مجانس معکوس شکل . . . $A'B'C'$ است در تجانسی که مرکزش S و نسبتش $-k$ باشد.

۸ - قضیه - مجانس دایره، دایره است.

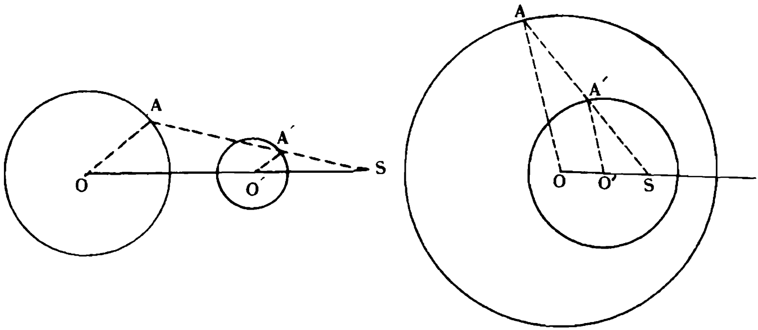
برهان - نقطهٔ O' (شکل ۹) مجانس O، مرکز دایره، و نقطهٔ M' مجانس یك نقطهٔ M از دایرهٔ O را بدست می‌آوریم؛ هرگاه k را



شکل ۹

مثبت فرض کنیم ، از $\frac{O'M'}{OM}=k$ بدست می‌آید : $O'M'=kR$ ، یعنی فاصلهٔ مجانسهای نقاط دایرهٔ O از نقطهٔ ثابت ´O ، مقدار ثابت kR است ؛ پس مکان ´M دایره‌ای است به مرکز ´O و شعاع kR . اگر k منفی باشد ، در استدلال فوق به جای آن باید $|k|$ را قرار داد .

۹ ـ قضیه ـ دو دایرهٔ واقع دریك صفحه را همواره می‌توان ، هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس یکدیگر دانست .



شکل ۱۰

برهان ـ اولاً ـ دایره‌های O و ´O مفروضند (شکل ۱۰) ؛ اگر دو شعاع دلخواه متوازی و هم جهت OA و ´O´A را رسم کنیم و ´AA و ´OO را امتداد دهیم تا یکدیگر را در S قطع کنند ، داریم :

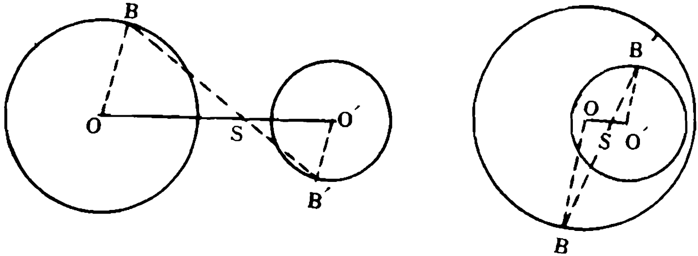
$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SO}{SO'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{R}{R'}$$

پس : $\frac{SO}{SO'}=\frac{R}{R'}$ ، یعنی S نقطه‌ای است ثابت ازامتداد پاره‌خط OO' که آن را به نسبت $\frac{R}{R'}$ تقسیم می‌کند ؛ این نقطه را می‌توان مرکز تجانس مستقیم دو دایره دانست و نسبت آن ، $\frac{R}{R'}$ است. بدیهی‌است‌که اگر دو دایره دارای مماس‌مشترك خارجی‌باشند،مماسهای مشترك خارجی آنها بر S خواهندگذشت .

ثانیاً - اگر دوشعاع دلخواه متوازی OB و $O'B'$ را در دو جهت مخالف رسم‌کنیم (شکل ۱۱) و منتهای آنها را به یکدیگر وصل‌کنیم ، خط واصل ، خط‌المرکزین دو دایره را در S قطع می‌کند ؛ چون :

$$\frac{SB}{SB'}=\frac{SO}{SO'}=\frac{OB}{O'B'}=\frac{R}{R'}$$

نقطهٔ S نقطه‌ای است ثابت بین O و O' که OO' رابه‌نسبت $\frac{R}{R'}$ تقسیم کرده است ؛ این نقطه را می‌توان مرکز تجانس معکوس دو دایره دانست



شکل ۱۱

و نسبت این تجانس ، برابر $-\frac{R}{R'}$ است . بدیهی است که اگر دو دایره متخارج باشند ، مماسهای مشترك داخلی آنها برمرکز تجانس معکوسشان خواهندگذشت .

نتیجه - مراکز تجانس مستقیم ومعکوس دو دایره، خطالمرکزین را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند .

۱۰ - حالتهای خاص - اول - در دو دایرهٔ مماس خارج ، نقطهٔ تماس ، مرکز تجانس معکوس دو دایره است .

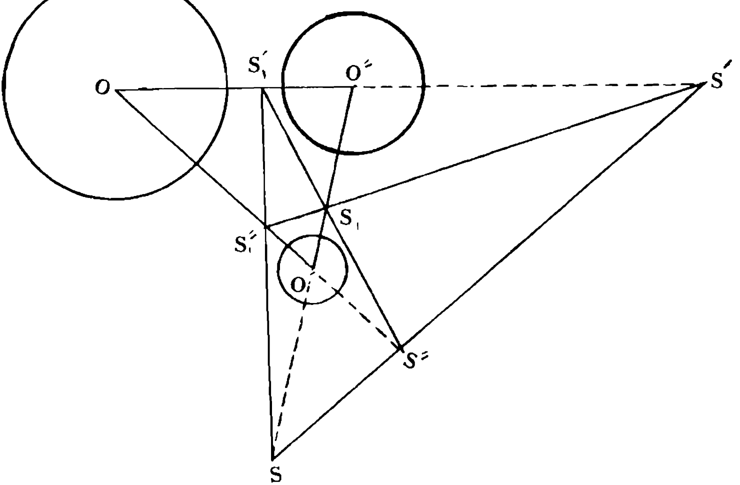
دوم - در دو دایرهٔ مماس داخل، نقطهٔ تماس، مرکز تجانس مستقیم دو دایره است .

۱۱ - سه دایره به مرکزهای O ، O' و O'' و شعاعهای R ، R' و R'' را در نظر می‌گیریم ؛ می‌دانیم که این سه دایره دو بدو یك مرکز تجانس مستقیم ویك مرکز تجانس معکوس دارند؛ پس هرسه دایره باهم دارای سه مرکز تجانس مستقیم و سه مرکز تجانس معکوسند .

۱۲ - قضیه - هرگاه مرکزهای سه دایره بر یك امتداد نباشند ، سه مرکز تجانس مستقیم آنها بر یك امتداد است ؛ همچنین هر دو مرکز تجانس معکوس و یك مرکز تجانس مستقیم بر یك امتداد است .

برهان -اولاً- S' مرکز تجانس مستقیم دایره‌های O و O'' (شکل ۱۲) ، S'' مرکز تجانس مستقیم دایره‌های O و O' و S مرکز تجانس مستقیم دایره‌های O' و O'' را بدست می‌آوریم .

این سه‌نقطه، که هریك روی یکی‌از اضلاع مثلث $OO'O''$ است،



شکل ۱۲

با رأسهای آن مثلث، رابطهٔ منلائوس راتشکیل‌می‌دهند؛ زیرا درحقیقت، چون S'' خارج قطعه‌خط OO' است ، داریم :

$$\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=\frac{S''O'}{S''O}=\frac{R'}{R} \qquad (۱)$$

همچنین :

$$\frac{\overline{S'O}}{\overline{S'O''}}=\frac{R}{R''} \qquad (۲)$$

و

$$\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}}=\frac{R''}{R'} \qquad (۳)$$

حال اگر این سه رابطه را عضو بعضو درهم‌ضرب کنیم، خواهیم‌داشت:

$$\frac{\overline{S'O}}{\overline{S'O''}}\cdot\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}}\cdot\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=\frac{R}{R''}\cdot\frac{R''}{R'}\cdot\frac{R'}{R}=۱$$

پس به‌موجب عکس قضیهٔ منلائوس، سه‌نقطهٔ S ، S' و S'' بر یك استقامتند.

ثانیاً - مرکزهای تجانس معکوس دوایررا دوبدو یافته S'_1 و S''_1 و S_1 می‌نامیم (شکل ۱۲) وثابت می‌کنیم‌که هر دو نقطه از این سه نقطه (مثلاً S'_1 و S_1) با یکی از مرکزهای تجانس مستقیم (مثلاً S'') بر یك امتداد است. در حقیقت نقاط S'_1 و S_1 و S'' که براضلاع مثلث $O''OO'$ واقعند، با رئوس‌آن مثلث رابطهٔ منلائوس را تشکیل می‌دهند ؛ زیراکه :

$$\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=\frac{R'}{R} \quad و \quad \frac{\overline{S'_1O}}{\overline{S'_1O''}}=\frac{-R}{R''} \quad و \quad \frac{\overline{S_1O''}}{\overline{S_1O'}}=\frac{-R''}{R'}$$

و پس از ضرب سه رابطه در یکدیگر ، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{S_1O''}}{\overline{S_1O'}}\times\frac{\overline{S'_1O}}{\overline{S'_1O''}}\times\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=1$$

پس به موجب عکس قضیهٔ منلائوس ، سه نقطهٔ S_1و S'_1 و S'' بر یك استقامتند .

تمرین

۱- در مثلث مفروضی مربعی محاط کنید ، یعنی مربعی‌که دو رأسش بر یك ضلع مثلث و هر یك از دو رأس دیگرش بر یکی از دو ضلع دیگر باشد .

۲- درمثلث مفروضی مثلثی محاط کنیدکه اضلاعش موازی با امتدادهای معینی باشند .

۳- زاویهٔ α و نقطهٔ A در درون آن داده شده است ؛ دایره‌ای بسازید که بر A بگذرد و بر اضلاع زاویه مماس باشد .

۴- دو خط و نقطهٔ A داده شده است . از A خطی بگذرانیدکه این دو خط را در B و C قطع کند و داشته باشیم : $AB=AC$.

۵- نظیرمسئلهٔ قبل را وقتی‌که داشته باشیم : $\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$ ، حل‌کنید .

۶ـ خط و دایره و نقطه‌ای داده شده است ؛ بر آن نقطه خطی مرور دهیدکه نسبت قطعاتی از آن‌که بین نقطهٔ مذکور و خط و دایره محدود می‌شود مساوی k باشد .

۷ـ نظیر مسئلهٔ قبل را وقتی‌که به جای خط ، دایرهٔ دیگری داده شده باشد حل‌کنید .

۸ـ دو دایره در A بریکدیگر مماسند ؛ دو قاطع‌که از A می‌گذرند ، آنها را در M ، M' ، N و N' قطع می‌کنند ؛ ثابت‌کنیدکه اگر MN همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس باشد ، $M'N'$ نیز بر دایرهٔ ثابت دیگری مماس خواهد بود .

۹ـ A ، B و C سه نقطهٔ واقع بر یك استقامتند ؛ بر A خط متحرکی می‌گذرانیم و از دو نقطهٔ دیگر ، عمودهای BB' و CC' را بر آن فرود می‌آوریم ؛ مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه‌ای‌که به این نحو بوجود می‌آید .

۱۰ـ مثلث ABC و نقطهٔ P داده شده است ؛ از D ، E و F اوساط اضلاع BC ، CA و AB ، سه خط موازی با AP ، BP و CP رسم‌می‌کنیم؛ ثابت‌کنیدکه این سه خط متقاربند .

۱۱ـ سه دایرهٔ C_1 ، C_2 و C_3 به یك مرکزند ؛ خط AMB را چنان رسم‌کنید که A و B بترتیب بر محیط C_1 و C_2 و M بر محیط C_3 باشد و داشته باشیم : $\frac{MA}{MB}=m$.

۱۲ـ بر یکی از نقاط تقاطع دو دایره ، قاطعی بگذرانیدکه این نقطه وسط آن باشد .

۱۳ـ ثابت‌کنیدکه هرگاه برای یك مثلث ABC دو مجانس نسبت به دو مرکز O و O' با دو نسبت k و k' بدست آوریم ، دو شکل جدید ، خود مجانس یکدیگرند؛ و اگر مرکز تجانس آنها را O'' بنامیم، O ، O' و O'' بر یك استقامتند .

۱۴ـ ثابت‌کنیدکه در هر مثلث ، نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع و نقطهٔ تلاقی سه میانه و نقطهٔ تلاقی سه عمود منصف ، بر روی یك خط راست قرار دارند .

۱۵ ـ ثابت کنیدکه هرگاه ارتفاعات مثلث ABC یکدیگر را در H قطع‌کنند ، اوساط اضلاع مثلث و مواقع سه ارتفاع و اوساط قطعات HA ، HB و HC ، بر روی یك دایره قرار دارند .

۱۶ـ نقطهٔ A بر محیط دایره‌ای و وتر BC درآن دایره‌مفروض‌است؛ وتر AD را چنان رسم‌کنیدکه BC را در E قطع‌کند و داشته باشیم :

$$\frac{AE}{ED}=k \ .$$

۱۷ ـ $\overrightarrow{AB}$ ، برداری است ثابت ؛ منتهای $\overrightarrow{AC}$ همواره بر خط‌ثابت Δ قراردارد و $\overrightarrow{AD}$ بر $\overrightarrow{AC}$ عمود و دو برابرآن است ؛ مطلوب است مکان هندسی منتهای برآیند این سه بردار .

۱۸ـ نظیر مسئلهٔ ۱۷ را ، درصورتی‌که منتهای $\overrightarrow{AC}$ همواره‌بر دایرهٔ ثابتی قرار داشته باشد ، حل‌کنید .

۱۹ـ قطبیهای مرکز تجانس دو دایره را نسبت به این دو دایره پیدا می‌کنیم. ثابت کنید که این دو قطبی از محور اصلی به یك فاصله‌اند .

فصل هفتم

انعکاس

الف ـ کلیات

۱ ـ تعریف ـ هرگاه نقطهٔ ثابتی مانند P و عددی جبری مانند a (مخالف با صفر) داشته باشیم ، منعکس هر نقطه مانند A نقطه‌ای است مانند ´A ، که با A و P بر یك استقامت باشد و حاصل‌ضرب اندازه‌های جبری فواصل P از A و ´A برابر a باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = a$$

P را **قطب** یا **مرکزانعکاس** و a را **قوت** انعکاس می‌نامند .

اگر قوت انعکاس مثبت باشد ، دو نقطهٔ منعکس در یك طرف‌قطب انعکاسند و می‌گوییم انعکاس **مثبت** است و ´A **منعکس مثبت** A است (شکل ۱) . واگر قوت انعکاس منفی باشد ، دونقطهٔ منعکس در دوطرف قطب انعکاسند ومی‌گوییم انعکاس **منفی** است و ´A **منعکس منفی** A است (شکل ۲) .

شکل ۱

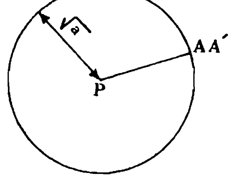
شکل ۲

۲ـ بطوری‌که ازتعریف انعکاس نتیجه می‌شود، **خاصیت انعکاس**

متقابل است، یعنی اگر A' منعکس A با قوت a باشد، A نیزمنعکس A' با همان قوت است.

۳ــ درانعکاس مثبت، هرگاه فاصلهٔ نقطه‌ای از قطب انعکاس مساوی جذر قوت انعکاس باشد، منعکس نقطه بر خود آن منطبق است.

پس:



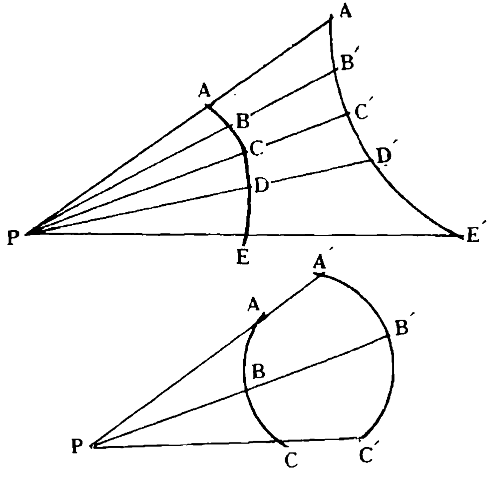
$PA \cdot PA' = a > 0$

شکل ۳

در انعکاس مثبت، مکان هندسی نقاطی‌که منعکسشان برخودشان منطبق‌است، محیط دایره‌ای است به مرکز قطب انعکاس و به شعاع جذرقوت انعکاس. این دایره را دایرهٔ انعکاس می‌نامند. (شکل ۳).

در انعکاس منفی، هیچ‌نقطه نمی‌تواند برمنعکس خود منطبق باشد.

۴ ــ تعریف ــ منعکس‌یك شکل نسبت‌به یك قطب و با یك قوت معین، شکلی است که هر نقطه‌اش منعکس یکی از نقاط آن شکل باشد. به عبارت



شکل ۴

دیگر ، **منعکس هر شکل نسبت به یك قطب و با یك قوت انعکاس، مکان هندسی منعکسهای نقاط آن شکل است نسبت به همان قطب و با همان قوت انعکاس** (شکل ۴) .

نتیجهٔ ۱ - هرگاه دو منحنی متقاطع باشند، منعکسهایشان هم متقاطعند و دو نقطهٔ تقاطع منعکس یکدیگرند (چرا ؟) .

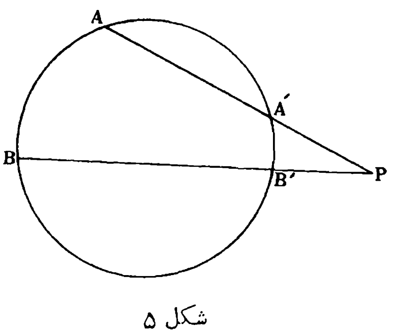
نتیجهٔ ۲- هرگاه دو منحنی برهم مماس باشند ، منعکسهایشان نیز برهم مماسند و دو نقطهٔ تماس منعکس یکدیگرند (چرا ؟) .

۵ - قضیه - چهار نقطهٔ دو بدو منعکس، بر روی محیط یك دایره قرار دارند .

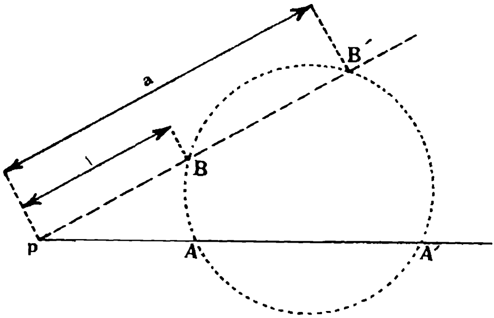
برهان - هرگاه A' (شکل ۵) منعکس A و B' منعکس B با یك قوت انعکاس و قطب P باشد، چون داریم $PA.PA' = PB.PB'$، دایره‌ای که بر A ، A' و B بگذرد ، بر B' هم خواهد گذشت (بدچه دلیل ؟) .

۶- مسئله - منعکس نقطه‌ای را از راه ترسیم بدست آورید .

- اگر P (شکل ۶) قطب و a قوت انعکاس و A نقطهٔ مفروض باشد ، و a را مثبت فرض کنیم، از P خطی دلخواه می‌کشیم و بر روی آن و در یك طرف P طولهای PB و PB' را بترتیب مساوی ۱ و a جدا می‌کنیم و بر A ، B و B' دایره‌ای می‌گذرانیم تا PA را در A' قطع کند ؛ A' نقطهٔ مطلوب، یعنی منعکس A است.



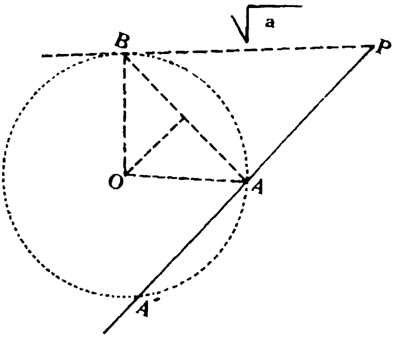
شکل ۵



شکل ۶

در صورتی که $a<0$ باشد، $PB'=|a|$ را در جهت عکس PB جدا می‌کنیم.

ـ اگر a، قوت انعکاس، مجذور کامل باشد، بر روی خطی که از P می‌گذرانیم (شکل ۷) طول PB را مساوی جذر a جدا می‌کنیم؛ آنگاه از B عمودی بر BP اخراج



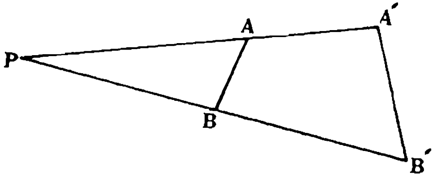
شکل ۷

می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در O قطع کند؛ دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OA رسم شود، PA را در A' قطع می‌کند و داریم:

$PA.PA'=PB^{2}=a$ ؛ پس A' منعکس A است.

۷ ـ قضیه ـ فاصلهٔ بین منعکسهای دو نقطه مساوی است با حاصل ضرب قدر مطلق قوت انعکاس در فاصلهٔ بین آن دو نقطه، تقسیم بر حاصل ضرب فواصل قطب انعکاس از همان دو نقطه.

برهان ـ اگر A' و B' بترتیب منعکسهای A و B باشند (شکل ۸)، چون چهار ضلعی $AA'B'B$ محاطی است، دو مثلث PAB و $PA'B'$ متشابهند (چرا؟)؛



شکل ۸

پس:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{PA'}{PB}$$

حال اگر صورت و مخرج طرف دوم این تساوی را در PA ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{PA.PA'}{PA.PB}=\frac{|a|}{PA.PB}$$

و از آنجا حاصل می‌شود:

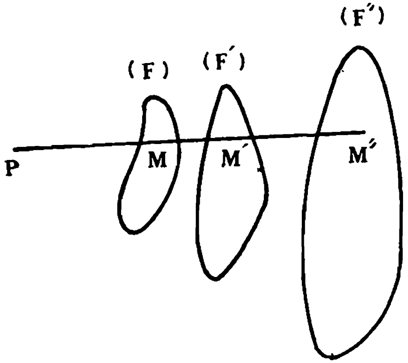
$$A'B'=\frac{|a|.AB}{PA.PB}$$

۸ ـ قضیه ـ منعکسهای یك شکل، نسبت به یك قطب و با قوتهای مختلف مجانسهای یکدیگرند. مرکز تجانس آنها قطب انعکاس، و نسبت تجانس آنها مساوی است با خارج قسمت قوتهای انعکاس.

برهان ـ فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای غیرمشخص از شکل (F)، و M' منعکس آن درانعکاسی به قطب P با قوت a و M'' منعکس دیگر آن درانعکاسی به همان قطب P وبا قوت a' باشد (شکل ۹)؛ بنا به تعریف:

$$\overline{PM}\ .\ \overline{PM'}=a \qquad (1)$$

$$\overline{PM}\ .\ \overline{PM''}=a' \qquad (2)$$



شکل ۹

چون این دو رابطه راعضو بعضو برهم تقسیم‌کنیم، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM''}}=\frac{a}{a'}$$

؛ یعنی M' مجانس M''، نسبت به‌مرکز تجانس P ، با نسبت تجانس $\frac{a}{a'}$ می‌باشد ؛ یا M'' مجانس M'، نسبت بدهمان مرکز، با نسبت‌تجانس $\frac{a'}{a}$ می‌باشد .

و چون نظیر این روابط برای تمام نقاط دوشکل F' و F'' برقرار است ، دو شکل مذکور با آن نسبتها مجانس یکدیگرند .

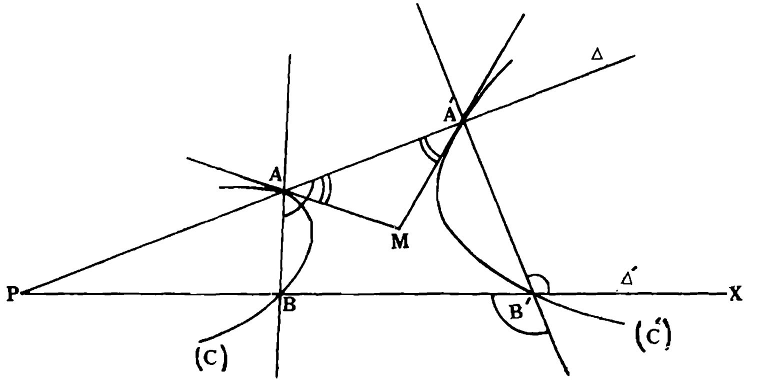
۹ ـ قضیه ـ مماسهای بر دو منحنی منعکس ، در دو نقطهٔ منعکس، با خط واصل بین آن دو نقطه ، زوایای متساوی می‌سازند .

برهان ـ فرض می‌کنیم‌که C' منعکس C باشد (شکل ۱۰) ؛ دو قاطع Δ و Δ' که بر قطب انعکاس می‌گذرند ، C و C' را بترتیب در A و A' و در B و B' قطع می‌کنند .

AB و $A'B'$ را وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم .

چون چهار نقطهٔ A ، A' ، B و B' بر روی یك دایره‌اند $\widehat{BAA'}=\widehat{A'B'x}$ ، یعنی یك زاویهٔ بین AB و خط Δ مساوی است با

يك زاويهٔ بين $A'B'$ و خط Δ'.



شکل ۱۰

حال اگر خط Δ' را در حول P دوران داده بتدریج به Δ نزدیك کنیم ، تساوی دو زاویهٔ مذکور همواره محفوظ است ؛ اما اگر B ، ضمن تغییر مکان بر منحنی C ، آنقدر به A نزدیك شود که با آن مشتبه گردد، یعنی قاطع AB در حول A آنقدر بچرخد که B بر A منطبق شود ، قاطع AB در آن وضع ، به مماس بر منحنی C در نقطهٔ A تبدیل می‌شود و در همان حال ، B' که روی منحنی C' تغییر مکان می‌دهد ، بر A' منطبق و قاطع $A'B'$ نیز به مماس بر C' در نقطهٔ A' تبدیل خواهد شد و Δ' هم بر Δ منطبق می‌شود و زاویه‌های BAA' و $A'B'x$ ، که همواره باهم مساوی بودند، به زاویه‌های بین Δ و مماسهای بر دو منحنی در A و A' تبدیل می‌شوند ؛ بنا براین :

$$\widehat{MAA'} = \widehat{MA'A}$$

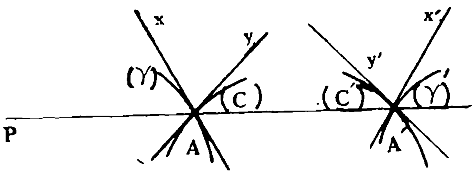
باتوجه به اینکه جهت این دو زاویه مختلف است، قضیهٔ فوق را می‌توان چنین بیان‌کرد :

مماسهای بر دو منحنی منعکس در دو نقطهٔ منعکس A و A' ، نسبت به عمودمنصف AA' ، قرینهٔ یکدیگرند .

از اینجا می‌توان دریافت‌که اگر در A **تقعر** منحنی C به طرف قطب باشد ، در A' **تحدب** C' به طرف قطب است و بعکس .

۱۰ ـ قضیه ـ زاویهٔ بین دو منحنی ، مساوی است با زاویهٔ بین منعکسهای آنها . یا به عبارت دیگر ، **در انعکاس ، زوایا تغییر نمی‌کنند .**

برهان ـ منحنیهای(C) و (γ) ومنعکسهایشان (C') و(γ') را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱) ؛ A یکی از نقاط تلاقی دو منحنی ، A' منعکس A ، Ax مماس بر (γ) ، Ay مماس بر (C) ، $A'x'$ مماس بر(γ') و $A'y'$ مماس بر (C') فرض می‌شود ؛ می‌دانیم که :



شکل ۱۱

$$\widehat{xAA'}=\widehat{x'A'A}$$

و

$$\widehat{yAA'}=\widehat{y'A'A}$$

از تفریق این دو رابطه خواهیم داشت :

$$\widehat{xAA'}-\widehat{yAA'}=\widehat{x'A'A}-\widehat{y'A'A}$$

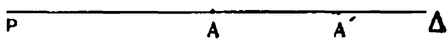
یعنی :

$$\widehat{xAy}=\widehat{x'A'y'}$$

ب - منعکسهای خط و دایره

۱۱ - قضیه - منعکس خط راستی‌که برقطب انعکاس بگذرد، برخود آن منطبق است ، یعنی خطی است راست .

برهان - زیرا که اگر خط Δ (شکل ۱۲) بر قطب P بگذرد . منعکس هر نقطهٔ A از آن، برروی امتداد PA یعنی بر روی همان خط است .

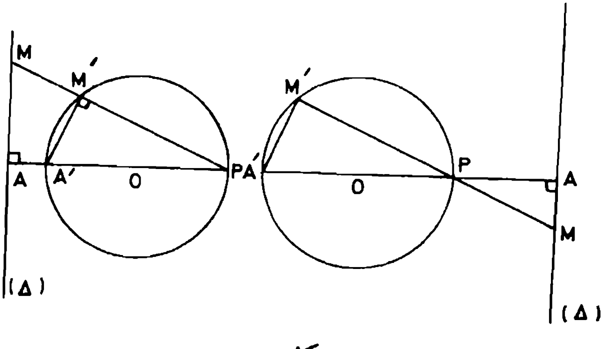


شکل ۱۲

۱۲ - قضیه - منعکس‌خط راستی‌که برقطب انعکاس نگذرد، دایره‌ای است که بر قطب انعکاس می‌گذرد .

مرکز این دایره بر روی عمودی است که از قطب انعکاس بر آن خط فرودآید وشعاعش نصف فاصلهٔ قطب‌انعکاس‌است ازمنعکس‌نقطهٔ تقاطع خط با عمودی‌که از قطب انعکاس بر آن فرود آمده باشد .

برهان - از P عمود PA را بر خط مفروض Δ فرود می‌آوریم



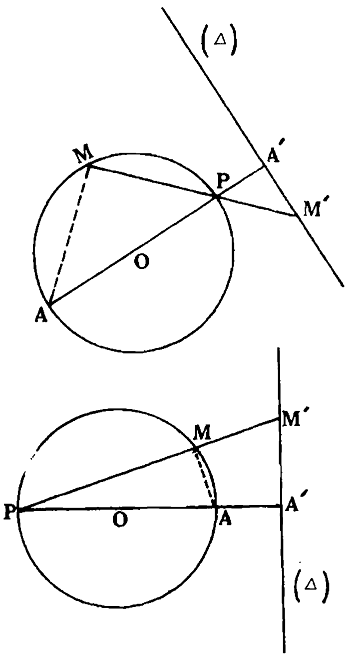
شکل ۱۳

(شکل ۱۳) و A' منعکس A را تعیین می‌کنیم ؛ اگر M' منعکس یك نقطهٔ غیرمشخص M از Δ باشد ، می‌دانیم که چهار نقطهٔ A ، A' ، M و M' بر محیط یك دایره قرار دارند (شمارهٔ ۵ همین فصل) ؛ پس : $\widehat{A'M'M}=90^\circ$ ؛ زیراکه مکمل یا مساوی زاویهٔ قائمهٔ MAA' است.

از آنجا نتیجه می‌شود که : $\widehat{A'M'P}=90^\circ$ یعنی ، M' برروی دایره‌ای است به قطر PA' .

۱۳ ـ قضیهٔ عکس ـ منعکس دایره‌ای‌که بر قطب انعکاس بگذرد ، خطی است مستقیم عمود برقطر مارّبر مرکز انعکاس. (این خط برمنعکس انتهای قطر مذکور می‌گذرد) .

برهان ـ دایرهٔ O را که بر قطب انعکاس P می‌گذرد ، در نظر می‌گیریم و A' منعکس A ، انتهای‌قطرمارّبر P، رابدست می‌آوریم (شکل ۱۴) ؛ حال اگر M' منعکس یك نقطهٔ غیرمشخص M از دایره باشد، چهارنقطهٔ A، A' ، M و M' برمحیط یك دایره واقعند (شمارهٔ ۵ همین فصل) و $\widehat{M'A'A}$ ، که مکمل یا مساوی زاویهٔ قائمهٔ AMM' است، برابر 90° است ؛ پس $M'A'$ بر PA'

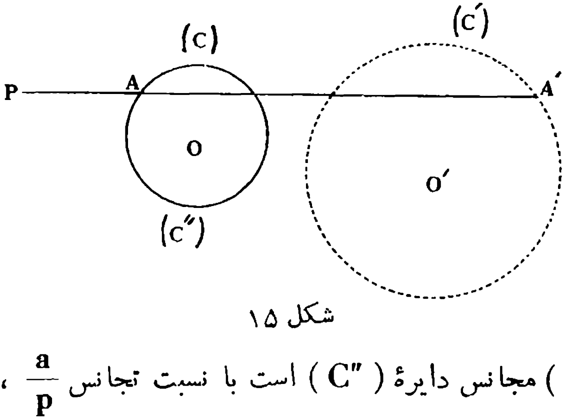


شکل ۱۴

عمود است ؛ یعنی منعکس هر نقطه از دایره روی خطی است که از A' بر PA عمود شده باشد .

۱۴ ـ قضیه ـ منعکس دایره‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، دایره است.

برهان ـ فرض می‌کنیم که شکل (C') منعکس دایرهٔ (C) نسبت به قطب P با قوت a باشد (شکل ۱۵) ؛ هرگاه قوت نقطهٔ P را نسبت به دایرهٔ (C) مساوی p فرض‌کنیم ، منعکس این دایره با قطب P و قوت p برخودآن منطبق خواهد بود؛ زیراکه منعکس هر نقطهٔ دایره بر روی همان دایره است ؛ این منعکس را (C'') می‌نامیم ؛ حالا برای دایرهٔ (C) نسبت بد قطب P دو منعکس بدست‌آورده‌ایم ، یکی با قوت a که شکل (C') است و دیگری با قوت p که دایرهٔ (C'') است و بطوری‌که می‌دانیم (شمارهٔ ۸) این دومنعکس، مجانس یکدیگرند؛ پس



شکل ۱۵

شکل (C') مجانس دایرهٔ (C'') است با نسبت تجانس $\frac{a}{p}$ ، یعنی دایره‌ای است که فاصلهٔ مرکز آن O' ، از نقطهٔ P ، مساوی $OP \times \frac{a}{p}$ و شعاعش مساوی با حاصل ضرب شعاع دایرهٔ (C) در $\frac{a}{p}$ می‌باشد .

به این ترتیب : **منعکس دایره‌ای‌که بر قطب انعکاس نگذرد ، مجانس آن هم هست و قطب انعکاس و مرکز تجانس بریکدیگر منطبقند .**

۱۵ ـ قضیه ـ یك خط و یك دایره، به هر وضع‌که درصفحه قرار داشته باشند ، منعکس یکدیگرند .

برهان ـ می‌دانیم که خط و دایره نسبت به یکدیگر ، ممکن است سه وضع داشته باشند :

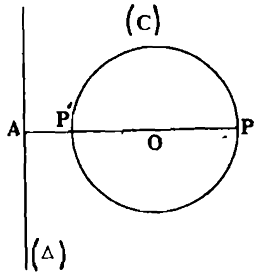
اول ـ خط خارج دایره باشد ؛

دوم ـ خط دایره را قطع‌کند ؛

سوم ـ خط بر دایره مماس باشد .

اینك قضیه را در هر سه حالت ثابت می‌کنیم .

اول ـ خط Δ خارج دایره است (شکل ۱۶) .

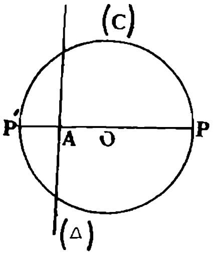


شکل ۱۶

ازمرکز دایره خطی بر Δ عمود می‌کنیم تا آن را درA ودایره را درP و P′ قطع‌کند؛ حال اگرP راقطب‌انعکاس‌اختیارکنیم، بسهولت معلوم می‌شود که خط Δ منعکس مثبت دایرۀ (C) و (C) منعکس مثبت Δ است با قوت $\overline{PA}\times\overline{PP'}$ ؛ و اگر P′ را قطب انعکاس اختیارکنیم ، Δ منعکس منفی (C) و (C) منعکس منفی Δاست باقوت $\overline{P'A}\times\overline{P'P}$ ؛ پس Δ و (C) به دو طریق مثبت و منفی منعکس یکدیگرند .

دوم ـ خط دایره را قطع می‌کند (شکل ۱۷) .

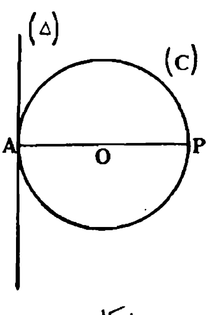
باز از مرکز دایره عمودی بر Δ رسم می‌کنیم تا خط و دایره را در A ، P و P' قطع کند ؛ اگر P را قطب انعکاس فرض کنیم، بآسانی دیده می‌شود که (C) منعکس Δ و Δ منعکس (C) است با قوت $\overline{PA} \times \overline{PP'}$ ؛ و اگر P' را قطب اختیار کنیم، خط منعکس دایره و دایره منعکس خط است با قوت $\overline{P'A} \times \overline{P'P}$ ؛ پس خط و دایره با دو قوت ، منعکس مثبت یکدیگرند .



شکل ۱۷

سوم ـ خط با دایره مماس است (شکل ۱۸) .

عمودی‌که از O برخط Δ رسم شود ، بر نقطهٔ تماس A می‌گذرد؛ در این حال فقط می‌توان P را قطب انعکاس اختیارکرد و Δ و (C) را ، با آن قطب و قوت PA^2 ، منعکس مثبت یکدیگر دانست . A را نمی‌توان قطب انعکاس‌گرفت، زیراکه قوت انعکاس صفر می‌شود .

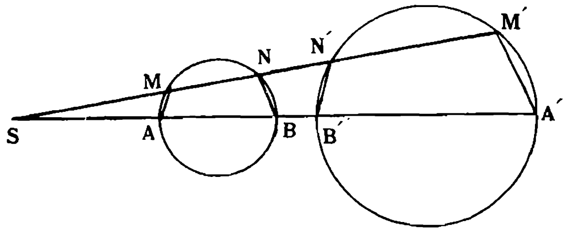


شکل ۱۸

۱۶ ـ قضیه ـ دو دایره ، به هروضع‌که در صفحه قرارداشته باشند، منعکس یکدیگرند .

برهان ـ در حقیقت ، دو دایره به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند ، مجانس مستقیم و مجانس معکوس یکدیگرند . حال اگر S یکی ازمرکزهای تجانس دو دایره باشد (شکل ۱۹) و خط‌المرکزین،

دو دایره را در A ، B ، B' و A' قطع کند و خط غیرمشخص دیگری



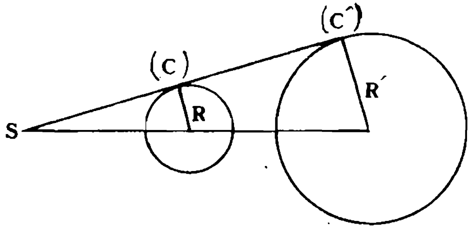
شکل ۱۹

که بر S می‌گذرد ، دایره‌ها را در M ، N ، N' و M' تلاقی کند ، برای اثبات قضیه کافی است ثابت کنیم که M و M' با قوت $SA \times SA'$ منعکس یکدیگرند؛ می‌دانیم که AM مجانس $B'N'$ وموازی با آن است؛ پس $\widehat{AMN}=\widehat{B'N'M'}$ ؛ اما چون $\widehat{B'N'M'}$ مکمل $\widehat{M'A'B'}$ است، بنابراین $\widehat{M'A'A}$ و $\widehat{M'MA}$ مکمل یکدیگرند ، و چهار نقطهٔ A ، M ، M' و A' روی یك دایره واقعند و $SM \cdot SM'=SA \cdot SA'$ ، یعنی M' منعکس M است با قوت $SA \times SA'$.

۱۷ ـ دقت کنید ! وقتی که دو دایره بر هم مماس باشند ، نقطهٔ تماس ، مرکز تجانس آنها هست اما قطب انعکاس آنها نیست ؛ زیرا که در این صورت قوت انعکاس صفر می‌شود .

۱۸ـ محاسبهٔ قوت انعکاس در دو دایره که منعکس یکدیگر فرض شوند.

هرگاه S مرکز تجانس وقطب انعکاس دایره‌های (C) و (C') باشد (شکل ۲۰)، و قوت انعکاس (C) و (C') را $\mathbf{a}$ وقوت نقطهٔ S نسبت به (C) را $\mathbf{p}$ و نسبت به (C') را $\mathbf{p}'$ فرض کنیم ، ازطرفی می‌دانیم که نسبت



شکل ۲۰

تجانس (C') به (C) برابر $\frac{a}{p}$ و نسبت تجانس (C) به (C') برابر $\frac{a}{p'}$ می‌باشد، و

ازطرف دیگر، نسبت تجانس (C')به (C) برابر $\frac{R'}{R}$ ونسبت تجانس (C) به (C') برابر $\frac{R}{R'}$ می‌باشد ؛ پس :

$$\frac{R'}{R}=\frac{a}{p} \qquad (۱) \qquad \text{و} \qquad \frac{R}{R'}=\frac{a}{p'} \qquad (۲)$$

حال اگر رابطه‌های ۱ و ۲ را عضو بعضو درهم ضرب‌کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\frac{a}{p'}\times\frac{a}{p}=\frac{R}{R'}\times\frac{R'}{R}=۱$$

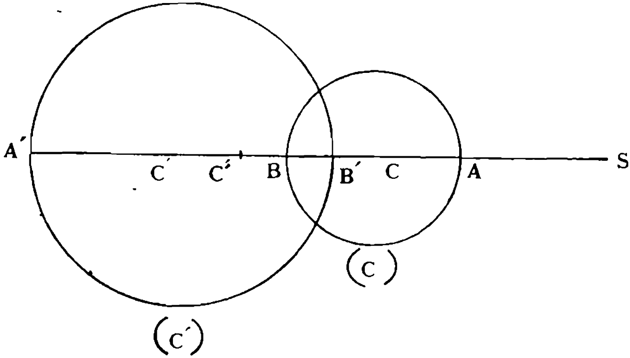
و از آنجا : $a=\sqrt{pp'}$

پس : **قوت انعکاس دو دایره نسبت به یکدیگر ، مساوی است با جذر حاصل‌ضرب قوتهای مرکز تجانس آن دو دایره نسبت به آنها .**

۱۹ ــ مرکزهای دو دایرهٔ منعکس ، مجانس یکدیگرند و منعکس یکدیگر نیستند . منعکس مرکز دایره از قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود :

قضیه ــ منعکس مرکز دایره‌ای‌که بر قطب انعکاس نگذرد ، مزدوج توافقی قطب انعکاس است نسبت به دو انتهای قطری از منعکس آن دایره‌که بر قطب انعکاس مرورکند .

برهان ــ درانعکاس مفروض با قطب S و قوت k ،منعکس‌دایرهٔ



شکل ۲۱

(C) راکه برمرکز انعکاس نگذشته است ، دایرهٔ (C´) می‌گیریم (شکل ۲۱) ؛ چنانچه خط‌المرکزین دو دایره، محیط دایرهٔ (C) را در A و B و محیط دایرهٔ (C´) را در A´ و B´ قطع کند (A´ منعکس A و B´ منعکس B است)، و نقطهٔ C" منعکس مرکز دایرهٔ (C) در این انعکاس باشد ، داریم :

$$\overline{SC} \cdot \overline{SC''} = k \qquad (۱)$$

و $\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = k$ (۲) و $\overline{SB} \cdot \overline{SB'} = k$ (۳)

چون (۴) $۲\overline{SC} = \overline{SA} + \overline{SB}$ است (زیرا بر طبق رابطهٔ شال می‌توان نوشت : $\overline{SC} = \overline{SA} + \overline{AC}$ و $\overline{SC} = \overline{SB} + \overline{BC}$ و نیز $\overline{AC} + \overline{BC} = ۰$) .

پس با استفاده از روابط ۱ و ۲ و ۳، رابطهٔ ۴چنین خواهد شد :

$$\frac{۲k}{\overline{SC''}} = \frac{k}{\overline{SA'}} + \frac{k}{\overline{SB'}}$$

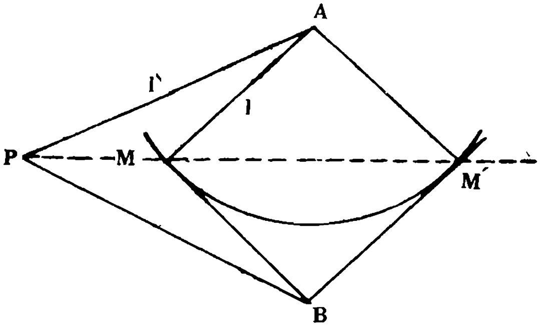
و یا :
$$\frac{۲}{\overline{SC''}}=\frac{۱}{\overline{SA'}}+\frac{۱}{\overline{SB'}}$$

و این رابطه نشان می‌دهد که C'' مزدوج توافقی S است نسبت به دو نقطهٔ A' و B' و قضیه ثابت است.

تمرین - درشکل۲۱ ثابت‌کنید نقطهٔ C' منعکس مزدوج توافقی قطب انعکاس است نسبت به دو نقطهٔ A و B.

ج - عاکس

۲۵ - عاکسها، وسایل رسم منعکسهای اشکالند ویك نوع آنها عاکس پوسلیه[۱] است. ساختمان این عاکس بسیار ساده و عبارت است از شش میلهٔ فلزی، چهارتا به طول l و دوتا به طول l' $(l<l')$ که مطابق شکل ۲۲، در نقاط P، M، M'، A و B به وسیلهٔ لولاهای بسیار ظریف به یکدیگر مربوط شده‌اند و بآسانی در حول این نقاط می‌چرخند و در نتیجه به هم نزدیك یا ازهم دورمی‌شوند. چون مثلثهای APB و AMB



شکل ۲۲

۱ - Paucellier

و $AM'B$ متساوی‌الساقینند ، سه نقطهٔ P ، M و M' بر امتداد عمود ـ منصف AB، یعنی برروی‌یك خط‌قراردارند. حاصل‌ضرب $PM \times PM'$ مقداری است ثابت ؛ زیرا که اگر بر فرض ، به مرکز A و به شعاع l دایره‌ای بزنیم ، $PM \times PM'$ قوت نقطهٔ P است نسبت به این دایره و مساوی است با $PA^2 - AM^2$ ، پس :

$$\text{مقدار ثابت} = l'^2 - l^2 = PM \times PM'$$

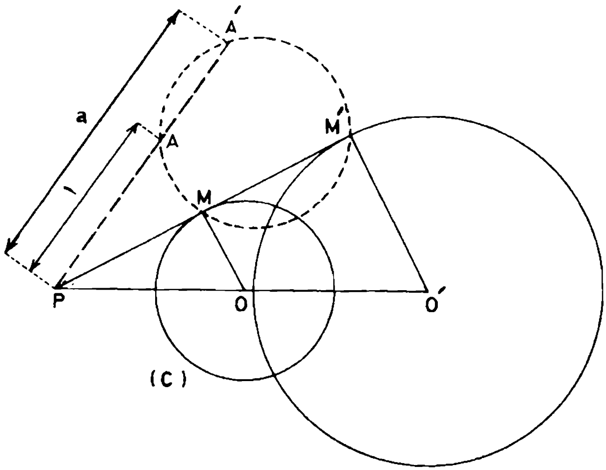
بنابراین، اگر P را برروی قطب انعکاس‌ثابت نگاه‌داریم و M(یا M') را روی شکلی جابجاکنیم ، M' (یا M) منعکس‌آن شکل را رسم می‌کند . در P ، M و M' وسایل مناسبی برای نگاه داشتن P روی قطب و حرکت دادن M روی شکل ، و رسم شکل منعکس (با نصب نوك مداد در M') ، تعبیه شده است .

د ـ حل چند مسئله

۲۱ ـ مسئله ـ منعکس دایرهٔ (C) را با قطب P وقوت a رسم کنید.

حل ـ بطورکلی‌برای رسم منعکس دایره کافی است که یك نقطه و مرکزش را تعیین کنیم . اما می‌دانیم که مرکز آن دایره ، منعکس مزدوج توافقی P نسبت به دو سرقطری از (C) است‌که از P می‌گذرد . در حالت خاصی که P خارج دایرهٔ (C) باشد (شکل ۲۳) ، کافی است که مماس PM را بر دایره رسم کنیم و M' منعکس M را (با ترسیم) بدست آوریم و از M' موازی MO بکشیم تا امتداد PO را در O' قطع

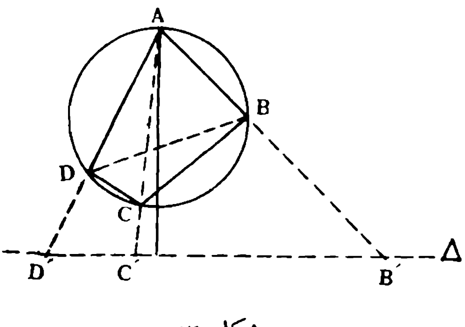
کند و بالاخره به مرکز O' و به شعاع $O'M'$ دایرهٔ مطلوب را رسم کنیم.



شکل ۲۳

۲۲ - مسئله - رابطهٔ بطلمیوس را در چهارضلعی محاطی به کمک انعکاس ثابت کنید.

حل - اگر ABCD چهارضلعی مفروض باشد (شکل ۲۴)، Δ منعکس دایرهٔ محیطی آن را نسبت به قطب A و با قوت دلخواه بدست می‌آوریم و بر روی آن، C'، B' و D' منعکسهای B و C و D را معین می‌کنیم؛ روی Δ این رابطه برقرار است:



شکل ۲۴

$$B'D' = B'C' + C'D' \qquad (۱)$$

اما به موجب آنچه در شمارهٔ ۷ همین فصل دیده‌ایم :

$$B'C' = \frac{|k|BC}{AB \cdot AC} \quad و \quad B'D' = \frac{|k|BD}{AB \cdot AD}$$

و

$$C'D' = \frac{|k|CD}{AC \cdot AD}$$

چون این سه مقدار را در رابطهٔ ۱ قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{|k|BD}{AB \cdot AD} = \frac{|k|BC}{AB \cdot AC} + \frac{|k|CD}{AC \cdot AD}$$

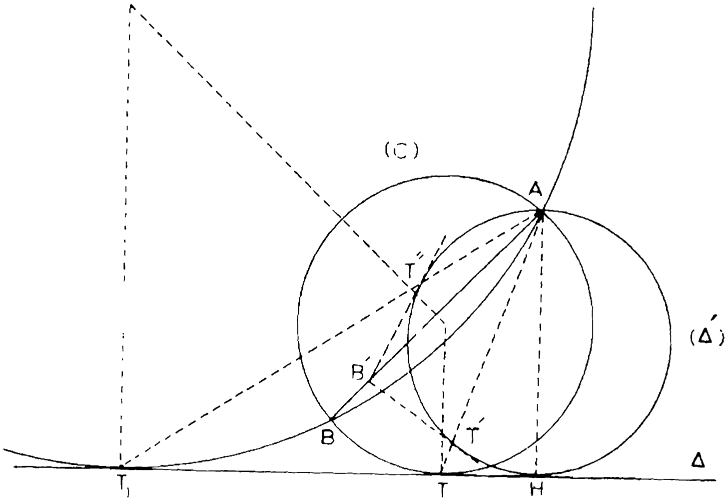
که پس از حذف مخرجها و ساده‌کردن ، حاصل می‌شود :

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + AB \cdot CD$$

۲۳ ـ مسئله ـ دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر دو نقطهٔ مفروض A و B بگذرد و بر خط مفروض Δ مماس باشد. واضح است که A و B باید در یك طرف Δ باشند .

حل ـ هرگاه مسئله حل شده‌باشد و (C) دایرهٔ مطلوب در T بر خط Δ مماس باشد (شکل ۲۵) ، درصورتی‌که شکل را به‌وسیلهٔ انعکاس تبدیل کنیم ، منعکس (C) بر منعکس Δ در T' ، منعکس T مماس خواهد بود .اما اگر قطب را یکی از نقاط (C) بگیریم، منعکس (C) خطی است مستقیم و منعکس Δ دایره‌ای خواهد بود مماس بر آن خط مستقیم ؛ پس مسئله را به این طریق حل می‌کنیم :

A راقطب انعکاس ومقداری دلخواه، مثلاً AH^2، راقوت انعکاس فرض می‌کنیم (AH عمودی است که از A بر Δ رسم‌کرده‌ایم) . منعکس



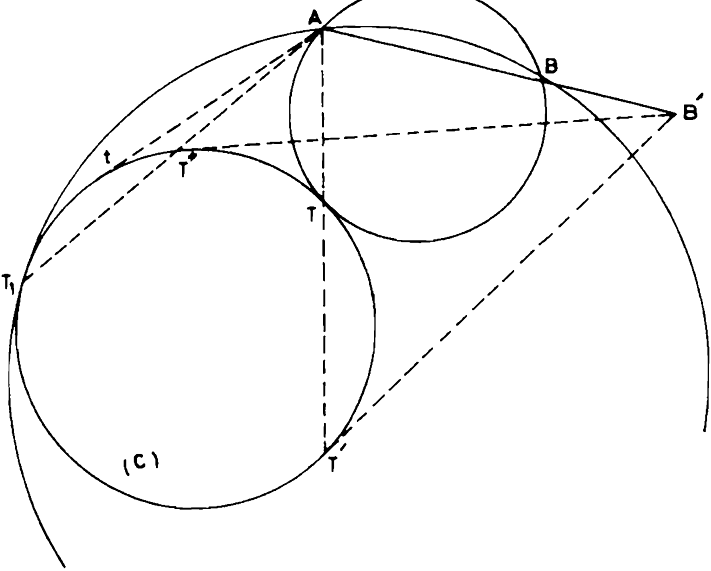
شکل ۲۵

خط Δ دایرهٔ ′Δ است که به قطر AH رسم شود. حال ′B منعکس B را بدست می‌آوریم و از ′B بر دایرهٔ (′Δ) مماس ′B′T را رسم کرده ′AT را رسم می‌کنیم تا Δ را در T قطع کند. دایره‌ای‌که بر A ، B و T بگذرد ، دایرهٔ مطلوب است . مسئله در حالت کلی دو جواب دارد .

۲۴ ـ مسئله ـ دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر دو نقطهٔ A و B بگذرد و بر دایرهٔ مفروض (C) مماس باشد .

حل ـ مسئله راکه حل‌شده فرض‌کنیم به طریقهٔ زیرمی‌رسیم :

از A مماس At را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم (شکل ۲۶) . A را قطب و At^2 راکه قوت انعکاس اختیارکنیم ، منعکس دایرهٔ (C) بر خودش منطبق است . ′B منعکس B را تعیین می‌کنیم و از ′B خطی رسم



شکل ۲۶

می‌کنیم که در T' بر (C) مماس شود .

AT' را وصل می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را بار دیگر در T قطع کند.

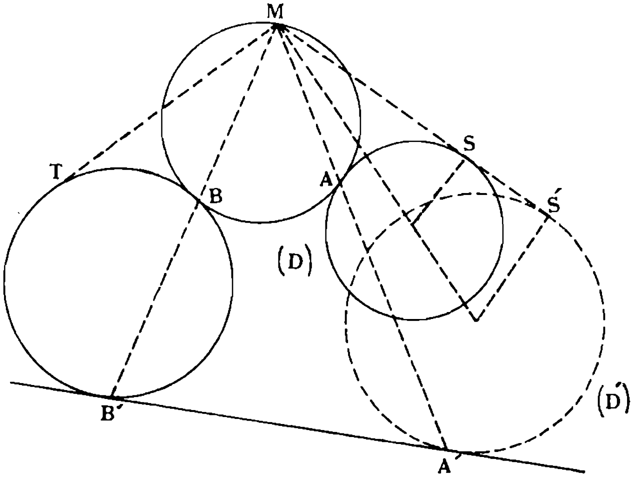
دایره‌ای که بر A ، B و T بگذرد، دایرهٔ مطلوب است، زیرا این دایره، منعکس خطی است که از B' بر (C) مماس شده است ، پس بر (C) مماس خواهد بود .

۲۵ ـ مسئله ـ دایره‌ای رسم کنید که بر نقطهٔ مفروض M بگذرد و بر دو دایرهٔ مفروض (C) و (D) مماس شود .

حلـ از M مماس MT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم (شکل ۲۷).

M را قطب و MT^2 را قوت انعکاس اختیار کرده منعکسهای دوایر (C) و (D) را بدست می‌آوریم.

منعکس (C) بر خودش منطبق است و منعکس (D) دایرهٔ (D′) است ، مماس مشترك دو دایرهٔ (D′) و (C) را رسم می‌کنیم تا برآنها در



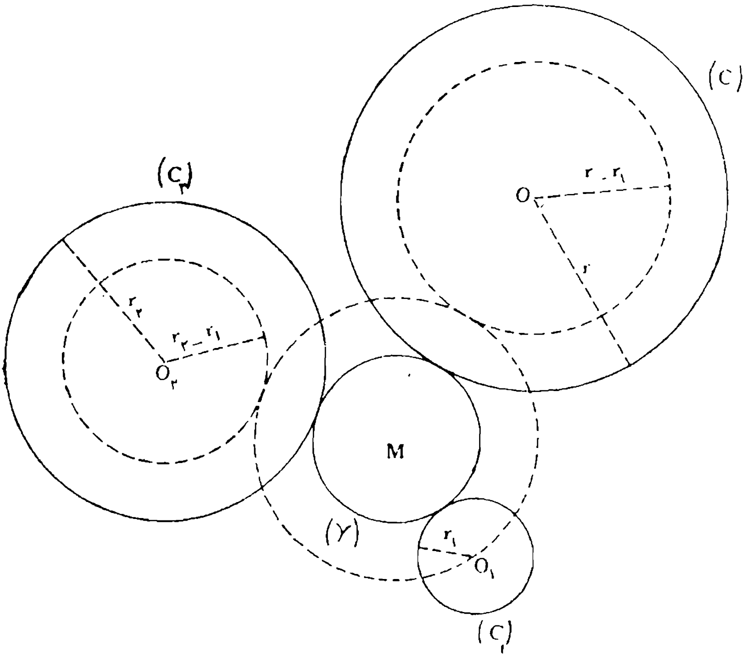
شکل ۲۷

A′ و B′ مماس شود . MA′ دایرهٔ (D) را در A و MB′ دایرهٔ (C) را در B قطع می‌کند . دایره‌ای که بر M ، A و B بگذرد ، دایرهٔ مطلوب است ، زیرا که این دایره ، چون منعکس مماس مشترك A′B′ است ، بر دو دایرهٔ مفروض مماس است .

۲۶ ـ مسئله ـ دایره‌ای رسم کنیدکه بر سه دایرهٔ مفروض (C) ، (C_1) و (C_2) مماس باشد .

حل ـ اگرمسئله حل شده و دایرهٔ (γ) (شکل ۲۸) دایرهٔ مطلوب و M مرکز آن باشد و مرکز کوچکترین سه دایرهٔ مفروض را O_1

بنامیم، دایره‌ای که به مرکز M و شعاع MO_1 رسم شود بر نقطهٔ O_1 خواهدگذشت و بر دو دایره، یکی به مرکز O وشعاع $r-r_1$ و دیگری به مرکز O_2 و شعاع r_2-r_1 مماس خواهد بود.



شکل ۲۸

پس مسئله تبدیل می‌شود به مسئلهٔ قبل، یعنی رسم دایره‌ای‌که بر یك نقطهٔ معلوم (یعنی O_1) بگذرد و بر دو دایره (یعنی دایره‌های به شعاع $r-r_1$ و مرکز O و به شعاع r_2-r_1 و مرکز O_2) مماس باشد. پس از بدست آمدن مرکز این دایره، رسم دایرهٔ مطلوب مسئله بآسانی انجام می‌گیرد.

تمرین

۱ - مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O می‌نامیم . A' ، B' و C' قرینه‌های رئوس‌مثلث را نسبت به O، A'' ، B'' و C'' قرینه‌های رئوس را نسبت به عمود منصفهای اضلاع مثلث بدست آورید . ثابت کنید که دایره‌های $OA'A''$ و $OB'B''$ و $OC'C''$ نقطهٔ مشترك دیگری نیز دارند .

۲ - در صفحهٔ مثلث ABC ، نقطه‌ای مانند O در نظر می‌گیریم . موربی اضلاع AB ، BC و AC را بترتیب در γ ، α و β قطع می‌کند . خطهای $O\alpha$ ، $O\beta$ و $O\gamma$ دوایر OBC ، OCA و OBA را در نقاط A' ، B' و C' تلاقی می‌کنند . ثابت کنیدکه چهار نقطهٔ O ، A' ، B' و C' بر يك دایره قرار دارند .

۳ - نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC را H می‌نامیم و بر روی HA و HB و HC ، سه نقطهٔ A' ، B' و C' را بقسمی تعیین می‌کنیم که : $HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'$. ثابت کنید که H از سه ضلع مثلث $A'B'C'$ به يك فاصله است .

۴- بر دونقطهٔ مفروض A و B دایره‌ای بگذرانید که دایرهٔ مفروضی را به زاویهٔ α قطع‌کند .

۵- ثابت‌کنیدکه اگر در يك‌چهارضلعی ، حاصل ضرب دو قطر مساوی با مجموع حاصل‌ضربهای اضلاع متقابل باشد، چهارضلعی محاطی‌است (عکس قضیهٔ بطلمیوس) .

۶- ثابت‌کنیدکه اگرقوت انعکاس مثبت باشد، هردایره که بر دو نقطهٔ منعکس بگذرد بر دایرهٔ انعکاس عمود است .

۷- از نقطهٔ M واقع درداخل دایره‌ای دو وتر AA' و BB' را عمود برهم رسم کنید و عمود MC را بر AB فرود آورید. الف - ثابت کنید که MC از I وسط $A'B'$ می‌گذرد. ب- ثابت‌کنید $MC.MI$ مقداری‌است‌ثابت.

۸ - خط Δ که بر نقطهٔ مفروض A می‌گذرد و دایرهٔ C داده شده است. بر A دایره‌ای بگذرانید که مرکزش روی Δ و خودش بر C مماس باشد.

۹ - نقطهٔ M در داخل زاویهٔ xOy واقع است. بر M دایره‌ای بگذرانیدکه بر دو ضلع زاویه مماس شود.

۱۰ - نقطهٔ A و خط D و دایرهٔ C داده شده است. بر A خطی بگذرانیدکه D و C را بترتیب در M و N قطع‌کند و داشته باشیم:

$$AM.AN=l$$

۱۱- بر نقطهٔ مفروض A خطی رسم‌کنیدکه اضلاع زاویهٔ مفروض α را در P و Q قطع‌کند و داشته باشیم: $AP.AQ=a^2$.

۱۲ - دایره‌ای وقطری از آن و نقطه‌ای مانند M مفروض است. بر M خطی بگذرانیدکه دایره و قطرش را در A و B قطع‌کند و حاصل‌ضرب دو قطعهٔ MA و MB مساوی a^2 باشد.

۱۳- بر نقطهٔ تقاطع دو دایره قاطعی رسم‌کنید که حاصل‌ضرب قطعات آن، که در دو دایره محصورند مساوی l^2 شود.

۱۴- در دایرهٔ مفروض مثلثی محاط‌کنیدکه اضلاعش بر سه نقطهٔ معین M ، N و P بگذرد.

۱۵- نقاط A ، B و C را به وسیلهٔ انعکاس به نقاط A' ، B' و C' بقسمی تبدیل‌کنیدکه مثلث $A'B'C'$ ، اولاً متساوی‌الساقین و ثانیاً متساوی‌ـ الاضلاع و ثالثاً قائم‌الزاویه باشد.

۱۶- سه نقطهٔ A ، B و C بر یك خط راست قرار دارند. بر A و

B و نقطهٔ متغیر E واقع بر عمودمنصف AB دایره‌ای می‌گذرانیم تا خط CE را در M قطع کند . مکان M چیست ؟

۱۷ ـ دو دایرهٔ O و O' یکدیگر را در M قطع کرده‌اند . بر M دایرهٔ متغیری می‌گذرانیم که دوایر مفروض را در A و A' قطع کند و MA' و MA دوایر مفروض را بترتیب بار دیگر در B و B' قطع کنند . مکان هندسی نقطهٔ دیگر تقاطع دوایر MAA و MBB' را بدست آورید .

بخش دوم

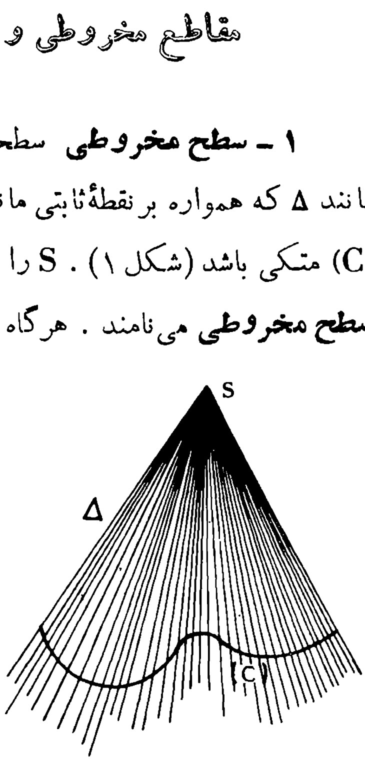
مخروطات

فصل اول

مقدمه

مقاطع مخروطی و موضوع مخروطات

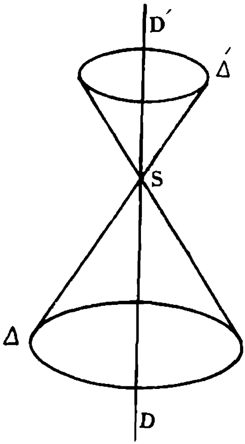
۱ ـ **سطح مخروطی** سطحی است حادث از تغییر مکان خطی مانند Δ که همواره بر نقطهٔ ثابتی مانند S بگذرد و برمنحنی ثابتی مانند (C) متکی باشد (شکل ۱) . S را **رأس** ، Δ را **مولد** و(C) را **هادی سطح مخروطی** می‌نامند . هرگاه منحنی هادی سطح مخروطی ، مسطح و مسدود باشد ، قسمتی از سطح مخروطی محدود بین رأس وهادی را **مخروط** می‌نامند . در این صورت منحنی هادی را **قاعدهٔ** مخروط می‌گویند. همیشه می‌توان هر مقطع از سطح مخروطی با یك صفحه را ، قاعده اختیار کرد (مشروط برآنکه صفحه از رأس نگذرد) .



شکل ۱

اگر قاعدهٔ مخروطی دایره باشد ، مخروط **مستدیر** است . هرگاه

در مخروط مستدیر ، عمودی‌که از رأس بر صفحهٔ قاعده فرود می‌آید بر مرکز قاعده بگذرد مخروط **دوار** است . در این صورت خطی راکه از رأس به مرکز قاعده وصل شود **محور** مخروط دوار می‌نامند . مخروط دوار را می‌توان قسمتی از سطح مخروطی حادث از دوران خطی مانند $\Delta S\Delta'$ در حول خط ثابت DSD' فرض‌کرد (شکل ۲) .



شکل ۲

چون خط Δ محدود نیست ، سطح مخروطی در دوطرف S بوجود می‌آید. هر جزء راکه‌دریك طرف رأس‌باشد یك **دامنهٔ** سطح مخروطی می‌نامند .

۲ ـ فصل مشترك صفحه باسطح مخروطی‌دوار ـ هرگاه صفحه‌ای مانند P (شکل۳)سطح مخروطی‌دواری راقطع‌کند، چهارحالت ممکن است اتفاق بیفتد :

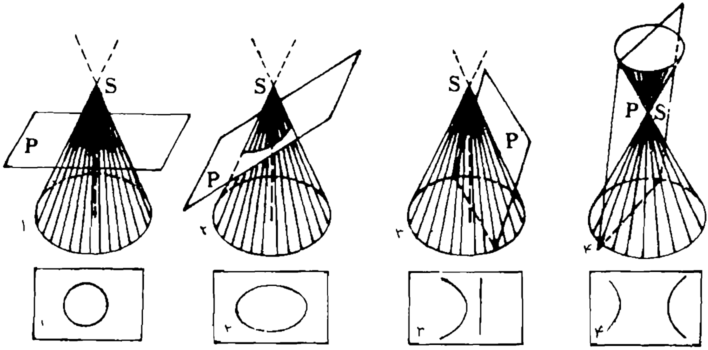
الف ـ صفحهٔ P بر محور عمود باشد . در این صورت منحنی مقطع ، دایره است (شکل ۳ـ۱) .

ب ـ صفحهٔ P بر محور عمود نباشد اما تمام مولدها را در یك طرف رأس قطع کند. در این صورت مقطع ، منحنی مسدودی است که آن را **بیضی** می‌گویند (شکل ۳ـ۲) .

ج ـ صفحهٔ P با یکی از مولدهای سطح مخروطی موازی باشد . در این صورت مقطع ، منحنی نامسدودی است‌که **سهمی** خوانده می‌شود

(شکل ۳-۳) .

د - صفحهٔ P برخی از مولدها را در یك طرف S و برخی دیگر را در طرف دیگر آن تلاقی می‌کند (یعنی هر دو دامنهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند) . دراین حال مقطع ، منحنی‌ای است مرکب ازدوشاخهٔ متمایز و نامسدودکه به آن **هذلولی** می‌گویند (شکل ۳-۴) .



شکل ۳

۳- چهارمنحنی دایره وبیضی و سهمی و هذلولی ،که می‌توان آنها را از قطع کردن سطح مخروطی دوار با یك صفحه بدست آورد ، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند .

۴- مخروطات قسمتی ازهندسه است‌که درآن از خواص بیضی ، سهمی و هذلولی گفتگو می‌شود .

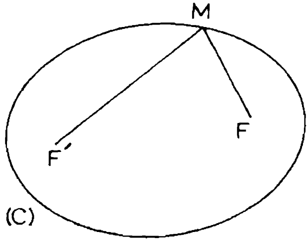
فصل دوم

بیضی

الف ـ مقدمات

۱ ـ تعریفها ـ بیضی مکان هندسی نقاطی است از یك صفحه که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مساوی مقدار ثابتی باشد.

دو نقطهٔ ثابت را **دو کانون** بیضی می‌گویند و معمولاً آنها را به F و F' نمایش می‌دهند. مقدار ثابت را به $2a$ می‌نمایند و آن را **عدد ثابت بیضی** می‌خوانند. فاصلهٔ بین دو کانون را **فاصلهٔ کانونی** بیضی می‌نامند و به $2c$ نمایش می‌دهند.



شکل ۱

منحنی (C) در شکل ۱ بیضی است. F و F' دو کانون آن و M یك نقطهٔ آن است و $MF+MF'=2a$.

در مثلث MFF' این روابط همواره برقرار است:

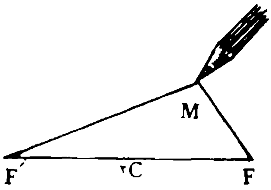
$$(1) \qquad MF+MF'>FF'$$

یعنی: $\quad 2a>2c$

و $$|MF'-MF|<FF' \qquad (۲)$$

۲ ـ رسم بیضی :

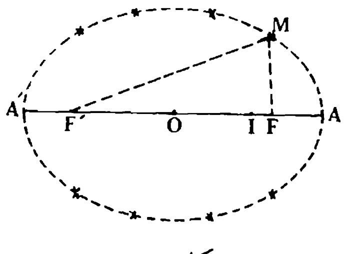
اول ـ با حرکت مداوم ـ این طریقه برای ترسیم بیضیهای بزرگ بکار می‌رود . دو میخ در دوکانون بیضی می‌کوبیم و نخی به طول $۲a+۲c$ اختیارکرده دو سر آن را به یکدیگر گره می‌زنیم . نخ را از پشت میخها می‌گذرانیم و نوك میخ یا مدادی را در داخل حلقهٔ نخ قرار داده می‌کشیم تا نخ به شکل مثلث MFF' درآید (شکل ۲) ، میخ یا مداد را جابجا می‌کنیم بقسمی که همواره نخ کشیده بماند .



شکل ۲

بدیهی است که همیشه $MF+MF'=۲a$ ، پس M بر روی بیضی سیر می‌کند .

دوم ـ بانقطه‌یابی ـ از O (شکل۳)، وسط FF'، دوطول OA و OA' را برابر a درطرفین O بر خط FF' جدا می‌کنیم و بر روی FF' نقطه‌ای مانند I اختیار می‌کنیم . دهانهٔ پرگار را یك بار به اندازهٔ IA باز کرده به مرکز F (یا F') قوسی می‌زنیم و بار دیگر آن را به اندازهٔ IA' باز می‌کنیم و به



شکل ۳

مرکز F' (یا F) قوس دیگری رسم می‌کنیم تا قوس اولی را در M قطع

کند . M روی بیضی است ، زیرا که :

$$MF+MF'=IA+IA'=AA'=۲a$$

به این ترتیب هردفعه چهارنقطه مانند M بدست می‌آید . با تغییر نقطهٔ I می‌توان نقاط دیگری از بیضی را بدست آورد که وقتی تعداد آنها بسیار زیاد شود از مجموع آنها بیضی بوجود می‌آید .

می‌دانید که برای آنکه دودایره یکدیگررا قطع‌کنند باید خط‌المرکزین آنها از مجموع دوشعاع کوچکتر و از تفاضل دوشعاع بزرگتر باشد. پس I باید بین F و F' اختیار شود زیراکه اگر خارج آنها باشد تفاضل دوشعاع از خط‌المرکزین FF' بزرگتر خواهد شد و دو دایره یکدیگررا قطع نمی‌کنند .

۳-قضیه - بیضی دارای دو محور تقارن است که یکی بر دوکانون F و F' می‌گذرد و دومی عمودمنصف FF' است .

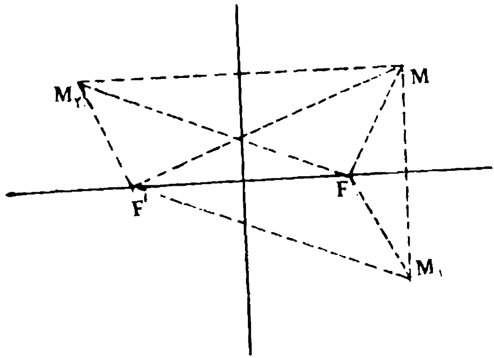
برهان - کافی‌است‌که ثابت کنیم که قرینهٔ هرنقطهٔ بیضی نسبت به یکی از این دوخط ، نقطه‌ای دیگر از بیضی است.

هرگاه M روی بیضی‌باشد (شکل۴)، یعنی $MF+MF'=۲a$، و $M_۱$ قرینهٔ M نسبت به FF' باشد، چون F و F' بر عمودمنصف $MM_۱$ قرار دارند ، داریم :

$$M_۱F'=MF' \quad و \quad M_۱F=MF$$

یعنی : $M_۱F+M_۱F'=MF+MF'=۲a$

پس $M_۱$ روی بیضی است .



شکل ۴

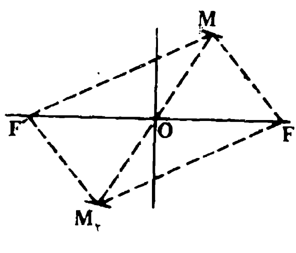
و نیز اگر M_2 قرینهٔ M نسبت به عمودمنصف FF' باشد، شکل $MM_2F'F$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است (زیرا که خط واصل بین اوساط دو قاعدهٔ آن بر قاعده‌ها عمود است)، پس دو ساق آن با هم و دو قطر آن نیز باهم مساویند، یعنی:

$$M_2F = MF' \quad \text{و} \quad M_2F' = MF$$

و از آنجا: $M_2F + M_2F' = MF + MF' = 2a$

پس M_2 نیز روی بیضی است.

۴ - قضیه - محل تقاطع دومحور تقارن بیضی مرکز تقارن آن است.



شکل ۵

برهان - درحقیقت اگر M نقطه‌ای از بیضی و O محل برخورد دو محور تقارن بیضی، و M_2 قرینهٔ M نسبت به O باشد (شکل ۵)، کافی است ثابت کنیم که M_2 نقطه‌ای از بیضی است. شکل $MF'M_2F$ متوازی‌الاضلاع است (زیراکه دوقطرش منصف یکدیگرند)، پس:

$$M_2F = MF' \quad \text{و} \quad M_2F' = MF$$

و از آنجا : $M_2F' + M_2F = MF + MF' = 2a$

یعنی M_2 روی بیضی است .

۵ـ محورهای بیضی و مرکز آنـ محورهای تقارن و مرکز تقارن بیضی‌را باختصار **محورها و مرکز** بیضی می‌نامیم .

۶ـ بیضی محورهای خود را قطع می‌کندـ زیرا که اگر بر FF' نقطهٔ A را به فاصلهٔ a از O اختیار کنیم (شکل ۳) :

$$AF' = a + c \quad \text{و} \quad AF = a - c$$

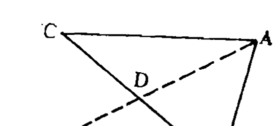
و از آنجا : $$AF + AF' = 2a$$

یعنی نقطهٔ A روی بیضی است . همچنین A' ، قرینهٔ A نسبت به O ، روی بیضی است . و نیز چون $FO < a$ ، اگر به مرکز F و شعاع a قوسی بزنیم تا عمودمنصف FF' را در دونقطهٔ B و B' قطع کند (شکل ۱۰):

$$BF + BF' = 2a \quad \text{و} \quad B'F + B'F' = 2a$$

یعنی B و همچنین B' روی بیضی است . ضمناً در مثلث OBF دیده می‌شودکه OB از BF ، یعنی از OA ، کوچکتر است.

۷ـ یادآوری :



شکل ۶

I ـ در مثلث ، میانهٔ وارد بر هر ضلع ، کوچکتر است از نصف مجموع دو ضلع دیگر .

زیرا که اگر میانهٔ AD را

به‌اندازهٔ خود تا A' امتداد دهیم ، (شکل۶)

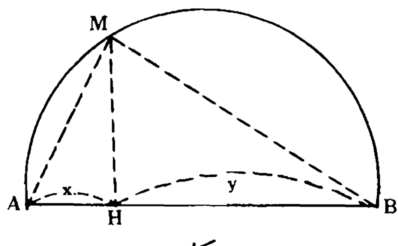
$$BA' = AC$$

و در مثلث ABA' : $AA' < AB + BA'$

یا : $۲AD < AB + AC$

و ازآنجا : $AD < \frac{AB + AC}{۲}$

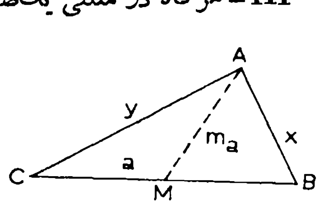
II - هرگاه مجموع دو طول متغیر ، مقدار ثابتی باشد ، حاصل‌ضرب آنها وقتی بزرگترین مقدار را حائز می‌شود (ماکزیمم است) که دو طول با هم مساوی باشند . زیرا که اگر $AB = l$ مجموع ثابت دو طول‌متغیر x و y باشد(شکل ۷)، عمودی‌که از H بر AB اخراج‌شود، نیمدایرهٔ به‌قطر AB رادر M قطع می‌کند و $MH^۲ = xy$ ؛ بطوری که



شکل ۷

می‌بینید بزرگترین‌مقدار MH وقتی است که H بر مرکز نیمدایره واقع شود ودرآن صورت $x = y$.

III - هرگاه در مثلثی یك‌ضلع ثابت باشد و دوضلع دیگر بقسمی تغییر کنند که مجموعشان همواره مقدار ثابتی باشد ، میانهٔ وارد بر ضلع‌ثابت ، وقتی کوچکترین‌مقدار را خواهد داشت (مینیمم خواهد



شکل ۸

بود) که دو ضلع متغیر با هم مساوی شوند ، زیرا که اگر فرض کنیم $x+y=l$ (شکل۸)، می‌دانیم که :

$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$x^2+y^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

یعنی :

$$m_a^2=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2=\frac{(x+y)^2-2xy}{2}-\frac{a^2}{4}$$

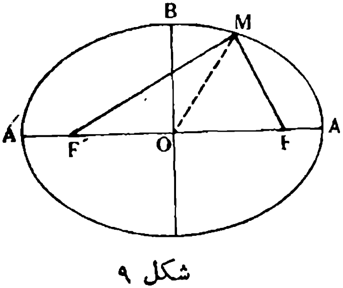
یا :

$$m_a^2=\frac{l^2}{2}-\frac{a^2}{4}-xy$$

در رابطهٔ اخیر ، تغییرات میانهٔ m_a بستگی به تغییرات حاصل ضرب متغیر xy دارد و هرچه xy بزرگترشود m_a کوچکترخواهدشد ؛ پس m_a وقتی مینیمم می‌شود که xy ماکزیمم شود ، یعنی وقتی که x و y باهم مساوی شوند.

۸ـ قضیه ـ A و A' دورترین نقاط بیضی از مرکزآن ، و B و B' نزدیکترین نقاط بیضی به مرکز آنند.

برهان ـ هرگاه M نقطه‌ای از بیضی غیر از A ، A' ، B و B' باشد (شکل۹)، درمثلث MFF':



شکل ۹

اولاً میانهٔ MO کوچکتر است از نصف مجموع دوضلع ، یعنی:

$$MO<\frac{MF+MF'}{2}=a$$

پس فاصلهٔ هر نقطهٔ بیضی ، از مرکز بیضی ، کوچکتر است از **a** ، مگر وقتی که **M** بر **A** یا **A´** منطبق شود که در آن صورت این فاصله مساوی **a** است .

ثانیاً در مثلث **MFF´** ، میانهٔ **MO** وقتی کوچکترین مقدار را حائز می‌شود که داشته‌باشیم: **MF=MF´** ، یعنی **M** بر **B** یا **B´** قرار گیرد ، پس **B** و **B´** نزدیکترین نقاط بیضی به **O** می‌باشند .

۹ - رأسهای بیضی - همانطور که دیدید ، دو قطر **AA´** و **BB´** را دو محور بیضی می‌نامند . **AA´** که ازدوکانون می‌گذرد **محور بزرگ** یا **محورکانونی** و **BB´** که عمود بر محورکانونی است **محور کوچك** نامیده می‌شود . **A** و **A´** دو رأس محور بزرگ و **B** و **B´** دو رأس محور کوچکند . طول **BB´** را ، که دوبرابر **OB** است ، معمولاً با **۲b** نمایش می‌دهند .

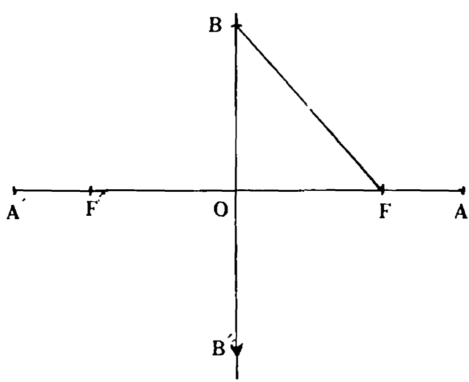
بین طولهای دو محور بزرگ و کوچك و فاصلهٔ کانونی بیضی این رابطه برقرار است (شکل ۱۰) :

$$BF^2=OB^2+OF^2$$

یا : $a^2=b^2+c^2$

و از آنجا :

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$



شکل ۱۰

۱۰ - خروج از مرکز بیضی - خارج

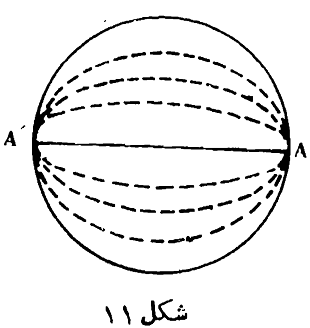
قسمت $\frac{c}{a}$ را ، که به e نمایش می‌دهند، خروج ازمرکز بیضی‌می‌نامند؛ e همواره از ۱کوچکتر است وازروی‌آن می‌توان درشکل بیضی تحقیق کرد . هرگاه در یك‌بیضی $2a$ ثابت‌باشد ، اما جای‌کانونها درروی محور بزرگ تغییر کند ، یعنی e کوچك و بزرگ شود ، شکل بیضی تغییر می‌کند .

هنگامی‌که $e = 1$ ، یعنی $\frac{c}{a} = 1$ یا $c = a$ ، داریم :

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0$ ، یعنی بیضی تبدیل به‌یك‌قطعه‌خط می‌شود(محور بزرگ AA').

وهنگامی‌که $e = 0$ ، یعنی $c = 0$ ، داریم : $b = a$، یعنی‌بیضی تبدیل به‌دایره می‌شود .

پس وقتی که خروج از مرکز از ۱ تا صفر تنزل کند بیضی از پاره‌خط مستقیم تا دایره تغییر شکل می‌دهد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

۱۱- دایره‌های مهم در بیضی :

الف-دایرۀهادی-دایره‌ای که مرکز آن یکی از دو کانون بیضی و شعاعش مساوی $2a$ ، عدد ثابت بیضی ، باشد دایرۀ **هادی بیضی** نامیده می‌شود . پس بیضی دارای دو دایرۀ هادی است که نسبت به مرکز O قرینۀ یکدیگرند ویکی را دایرۀ هادی‌کانون F و دیگری

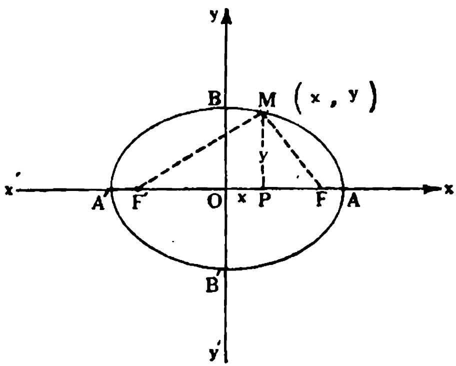
را دایرهٔ هادی کانون F' می‌نامند .

ب ـ دایرهٔ اصلی ـ دایره‌ای راکه مرکزش مرکز بیضی وشعاعش a ، نصف عدد ثابت بیضی ، باشد **دایرهٔ اصلی بیضی** می‌نامند .

۱۲ ـ شعاعهای حامل ـ دو پاره‌خطی که بین هر نقطهٔ بیضی و دوکانون آن رسم می‌شود، شعاعهای حامل آن نقطه نامیده می‌شوند.

ب ـ معادلهٔ بیضی

۱۳ ـ محاسبهٔ طول شعاعهای حامل ـ فرض می‌کنیم که محورهای مختصات بر محورهای بیضی منطبق باشد ، یعنی $x'x$ بر $A'A$ و $y'y$ بر $B'B$ (شکل۱۲)منطبق باشد. اگر M یك نقطه از بیضی و به‌مختصات x و y باشد ، چون



شکل۱۲

$F(c$ و $0)$ و $F'(-c$ و $0)$ است ، داریم :

$$MF^2=(x-c)^2+y^2 \quad \text{و} \quad MF'^2=(x+c)^2+y^2 \qquad (1)$$

و از آنجا :

$$MF'^2-MF^2=(x+c)^2-(x-c)^2=4cx \qquad (2)$$

و چون $MF'^{2}-MF^{2}=(MF'+MF)(MF'-MF)$

$$=2a(MF'-MF)$$

رابطهٔ (۲) به این صورت در می‌آید :

$$2a(MF'-MF)=4cx$$

یا :

از طرفی داریم :

$$\begin{cases} MF'-MF=\dfrac{2cx}{a} \\ MF'+MF=2a \end{cases}$$

حال از جمع و تفریق دو رابطهٔ اخیر طول شعاعهای حامل MF' و MF چنین بدست می‌آید :

$$MF'=a+\frac{cx}{a}$$

$$MF=a-\frac{cx}{a}$$

هنگامی که $x>0$ ؛ داریم : $MF'>MF$ (شکل ۱۲) ، و هنگامی که $x<0$ ، داریم : $MF>MF'$ ؛ و در هر حال با توجه به اینکه همیشه $|x|\leqslant a$ (چرا ؟) ، مقادیری که از دو رابطهٔ فوق برای MF' و MF بدست می‌آید مثبت است .

۱۴- معادلهٔ بیضی - فرض می‌کنیم که محورهای مختصات بر محورهای بیضی منطبق باشند (شکل ۱۲) . برای بدست آوردن معادلهٔ بیضی ، یعنی رابطهٔ بین طول و عرض هر نقطهٔ آن ، کافی است‌که مقدار یکی از شعاعهای حامل بیضی را در یکی‌ازدو رابطهٔ ۱ (شمارهٔ ۱۳ همین

فصل) نقل کنیم ، نتیجه چنین می‌شود :

$$(a+\frac{cx}{a})^2=(x+c)^2+y^2$$

حال اگر پرانتزها را به قوه برسانیم و جمله‌های متساوی را از دو طرف حذف کنیم و مخرج طرف اول را از بین ببریم به این نتیجه می‌رسیم :

$$a^4+c^2x^2=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

یا : $$a^4-a^2c^2=a^2y^2+(a^2-c^2)x^2$$

یا : $$a^2(a^2-c^2)=a^2y^2+(a^2-c^2)x^2$$

که می‌توان نوشت :

$$a^2b^2=a^2y^2+b^2x^2$$

اکنون اگر دو طرف رابطهٔ اخیر را بر a^2b^2 تقسیم کنیم، معادلهٔ بیضی به این صورت بدست می‌آید :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

۱۵- برعکس می‌توان ثابت کرد که اگر مختصات نقطه‌ای در رابطهٔ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (۱) صدق کند و a بزرگتر از b باشد، آن‌نقطه در روی یك بیضی به‌محور بزرگ $2a$ و محور کوچك $2b$ واقع است .

در حقیقت این رابطه را می‌توان چنین نوشت :

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

که از آن نتیجه می‌شود : $|x|<a$

اکنون MF و MF' را از روی مختصات نقاط M ، F و F' (شکل ۱۲) ، به فرض اینکه F و F' دو نقطه از محور xها به‌طول c و $-c$ باشند و $c^2=a^2-b^2$ ، حساب می‌کنیم :

$$MF^2=y^2+(x-c)^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+(x-c)^2$$

$$=\frac{b^2a^2-b^2x^2+a^2x^2+a^2c^2-2a^2cx}{a^2}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)x^2+a^2(b^2+c^2)-2a^2cx}{a^2}$$

$$=\frac{c^2x^2+a^4-2a^2cx}{a^2}=\frac{(a^2-cx)^2}{a^2}$$

$$=\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2$$

یا :

$$MF=a-\frac{cx}{a}$$

(زیرا چون $|x|<a$ ، علامت x هرچه باشد $a>\frac{cx}{a}$)

و به طریق مشابه نتیجه می‌شود :

$$MF'=a+\frac{cx}{a}$$

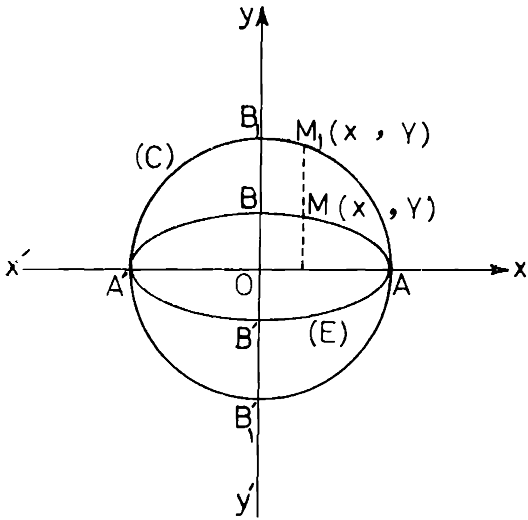
که حاصل‌جمع این دو شعاع حامل :

$$MF+MF'=2a$$

یعنی M روی بیضی است که کانونهای آن F و F' و مقدار ثابتش $2a$ است .

ج ـ تصویر دایره

۱۶ ـ قرارداد ـ هرگاه بیضی (E) و دایرهٔ اصلی (C) به قطر AA' را رسم کرده محورهای بیضی را ، چنانکه در شکل ۱۳ دیده می‌شود ، محورهای مختصات اختیار کنیم و از هر نقطهٔ مانند **M** از بیضی



شکل ۱۳

خطی عمود بر $x'x$ بکشیم تا دایره را در نقطهٔ M_1 قطع کند ، M_1 و **M** را که دارای یك طولند **دو نقطهٔ متناظر** یا **دو نقطهٔ هم‌طول** می‌نامند .

M_1 از دایرهٔ اصلی نقطهٔ نظیر یا هم‌طول **M** از بیضی است و **M** از بیضی نقطهٔ نظیر یا هم‌طول M_1 از دایرهٔ اصلی است .

۱۷ ـ قضیه ـ قدرمطلق نسبت عرض هر نقطه از بیضی به‌عرض نقطهٔ هم‌طولش از دایرهٔ اصلی مساوی $\frac{b}{a}$ (نسبت محورهای بیضی) **است .**

برهان ـ اگر مختصات M را x و y ومختصات M_1 را x و Y بنامیم (شکل۱۳)، (بدیهی‌است‌که x هر دو یکی است) ، چنین خواهیم داشت :

معادلهٔ بیضی : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ یا $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ (۱)

معادلهٔ دایره : $x^2+Y^2=a^2$

یا : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1$ یا $\frac{Y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ (۲)

چون طرفهای دوم دو رابطهٔ ۱ و ۲ یکی است ، نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{Y^2}{a^2} \quad \text{یا} \quad \frac{y^2}{Y^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

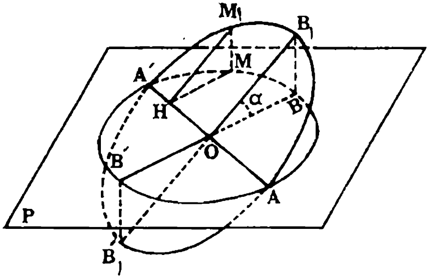
و پس از استخراج جذر: $\frac{y}{Y}=\pm\frac{b}{a}$ ، که می‌توان برحسب قدر مطلق چنین نوشت :

$$\boxed{\left|\frac{y}{Y}\right|=\frac{b}{a}}$$

بخصوص اگر دو نقطهٔ هم‌طول هردو در یك طرف AA' باشند ، $\frac{y}{Y}$ مثبت است و خواهیم داشت : $\frac{y}{Y}=\frac{b}{a}$.

۱۸ ـ قضیه ـ تصویر دایره بر هر صفحه‌ای که بر صفحهٔ دایره عمود یا با آن موازی نباشد بیضی است .

برهان ـ فرض می‌کنیم که صفحهٔ تصویر با صفحهٔ دایره زاویهٔ α بسازد . چون تصاویر یک شکل بر روی صفحات متوازی متساویند ، صفحهٔ تصویر را آنقدر به موازات خود جابجا می‌کنیم تا بر مرکز دایره بگذرد . فصل مشترک صفحهٔ دایره باصفحهٔ تصویررا AA' (شکل ۱۴) و قطر عمود بر قطر AA'



شکل ۱۴

را $B_1B'_1$ می‌نامیم و B_1 و B'_1 را در B و B' تصویر کرده ثابت می‌کنیم که مکان تصاویر نقاط دایره ، بیضیی است که محور بزرگ آن AA' و محور کوچکش BB' است .

درحقیقت اگر نقطهٔ غیرمشخص M_1 از دایره را در M بر صفحهٔ P تصویر کنیم و M_1H را موازی B_1O یعنی عمود بر AA' بکشیم ، MH نیز با BO موازی می‌شود ودومثلث M_1HM و B_1OB متشابهند

و

$$\frac{M_1H}{MH}=\frac{B_1O}{BO}$$

یعنی :

$$M_1H = MH \times \frac{B_1O}{BO} \qquad (1)$$

حال B_1O را a و BO را b می‌نامیم ودرصفحهٔ دایره‌امتداد $A'A$ را محور xها و امتداد $B_1B'_1$ را محور Yها و مختصات M_1 را x و Y

فرض می‌کنیم . همچنین در صفحهٔ تصویر همان امتداد $A'A$ را محور xها و امتداد $B'B$ را محور yها می‌گیریم و مختصات نقطهٔ M را x و y می‌نامیم؛ به این ترتیب : $\overline{OH}=x$ و $\overline{HM_1}=Y$ و $\overline{HM}=y$.

اکنون معادلهٔ دایره را می‌نویسیم :

$$x^2+Y^2=a^2 \qquad (2)$$

اما از رابطهٔ ۱ $\qquad M_1H=|Y|=|y|\times\frac{a}{b}$

این مقدار را در معادلهٔ ۲ قرار می‌دهیم :

$$x^2+y^2\times\frac{a^2}{b^2}=a^2$$

حال اگر دوطرف رابطهٔ اخیررا بر a^2 تقسیم‌کنیم ،حاصل می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

بطوری‌که می‌بینید x و y یعنی مختصات نقطهٔ M ،تصویرهر نقطهٔ دایره ، در معادلهٔ بیضی صدق می‌کنند ، پس تصویر دایره بیضی است .

محور بزرگ این بیضی تصویر قطری از دایره است که با صفحهٔ تصویر موازی است و محور کوچك ، تصویر قطری است که بر آن قطر عمود باشد .

واضح است که درصورتی که صفحهٔ تصویر با صفحهٔ دایره موازی باشد ، تصویر دایره با خودش مساوی است ، یعنی دایره است. ودرحالی که صفحهٔ تصویر برصفحهٔ دایره عمود باشد، تصویردایره خطی‌است‌راست.

نتیجهٔ ۱ ـ در شکل ۱۴ می‌بینید که :

$$B_1B = \sqrt{B_1O^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

پس B_1B مساوی نصف فاصلهٔ کانونی بیضی تصویر دایره است .

هرگاه α زاویهٔ بین صفحهٔ دایره و صفحهٔ تصویر باشد واضح است که $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ و $\sin\alpha = \frac{c}{a}$.

امادر شمارهٔ ۱۰ همین فصل دیدیم که $\frac{c}{a}$ راخروج‌ازمرکزمی‌نامند.

پس خروج از مرکز بیضی مساوی است با سینوس زاویهٔ بین‌صفحهٔ بیضی و صفحهٔ دایره‌ای‌که بیضی مفروض تصویر آن است ، یعنی :

$$e = \sin\alpha$$

هنگامی‌که $\alpha = 90^\circ$ باشد ، $e = 1$ و $b = 0$ است وتصویر دایره، یعنی بیضی ، تبدیل به یك خط می‌شود و هرگاه $\alpha = 0^\circ$ باشد ، $c = 0$ و تصویر دایره بر خود آن منطبق و بیضی تبدیل به دایره خواهد شد .

پس بار دیگر بحثی که در شمارهٔ ۱۰ همین فصل دربارهٔ شکل بیضی برحسب تغییرخروج از مرکزکردیم تأیید می‌شود .

نتیجهٔ۲ـ می‌دانیم که مساحت تصویر هر شکل مساوی است با حاصل ضرب مساحت آن در کسینوس‌زاویهٔ بین صفحهٔ شکل و صفحهٔ تصویر ، پس :

$$\text{مساحت بیضی} = \text{مساحت دایره} \times \cos\alpha = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$$

مساحت بیضی مساوی است با حاصل‌ضرب π در نصف محور بزرگ و در نصف محور کوچك .

نتیجهٔ۳ـ دایره‌ای‌که بیضی تصویر آن است مساوی است با دایرهٔ

اصلی بیضی ، ولی صفحه‌اش با صفحهٔ بیضی زاویه‌ای می‌سازد که کسینوس آن $\frac{b}{a}$ است، پس می‌توان گفت :

بیضی تصویر دایرهٔ اصلی خود است ، هنگامی که این دایره را به اندازهٔ $\alpha = Arccos\frac{b}{a}$ در حول محور بزرگ بیضی دوران داده‌باشند.

بنابراین مماس بر بیضی ، تصویر مماس بر دایرهٔ اصلی و قاطع بیضی ، تصویر قاطع دایرهٔ اصلی است وقتی که دایرهٔ اصلی به اندازهٔ α در حول محور بزرگ بیضی دوران کرده باشد .

با استفاده از این نتیجه می‌توان بسیاری از مسائل مربوط به‌بیضی را به‌کمك مسائل مشابه آن در دایرهٔ اصلی حل‌کرد .

د ـ داخل و خارج بیضی

۱۹ ـ بیضی صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند . **ناحیهٔ داخلی** یا **داخل بیضی** شامل کانونها و مرکز بیضی است . هر نقطه مانند M_1 (شکل ۱۵) از این ناحیه چنان است که اگر از F (یا F') به آن وصل کنیم روی پاره‌خط FM_1 (یا $F'M_1$) نقطه‌ای از بیضی یافته نمی‌شود .

اما **ناحیهٔ خارجی** یا **خارج بیضی** چنان است که اگر از F به یکی از نقاط آن ناحیه، مثلاً N_1، وصل کنیم پاره‌خط FN_1 حتماً بیضی را در یك نقطه قطع می‌کند .

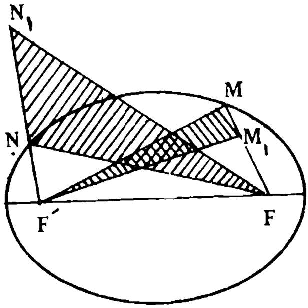
۲۰ ـ قضیه ـ مجموع فواصل هر نقطهٔ داخل بیضی از دوکانون ، کوچکتر است از ۲a و مجموع فواصل هر نقطهٔ خارج بیضی از دوکانون ، بزرگتر است از ۲a .

برهان ـ اگر M_1 نقطه‌ای در داخلِ بیضی باشد (شکل ۱۵) ، امتداد FM_1 بیضی را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند بطوری که M_1 بین F و M می‌باشد . در مثلث MM_1F' :

$$M_1F' < MF' + MM_1$$

حال اگر به دوطرف این نامساوی مقدار M_1F را علاوه کنیم ، خواهیم داشت :

$$M_1F + M_1F' < MF' + (MM_1 + M_1F)$$



شکل ۱۵

واگر به جای مجموعِ داخل پرانتزحاصلِ آن ، MF ، را قرار دهیم ، طرف دوم می‌شود ۲a ، پس:

$$M_1F + M_1F' < 2a$$

هرگاه N_1 نقطه‌ای درخارج بیضی باشد ، با استدلالی شبیه به آنچه برای قسمت قبلی گفتیم ، داریم :

$$N_1F + N_1N > NF$$

یا:

$$N_1F + (N_1N + NF') > NF + NF'$$

یا :

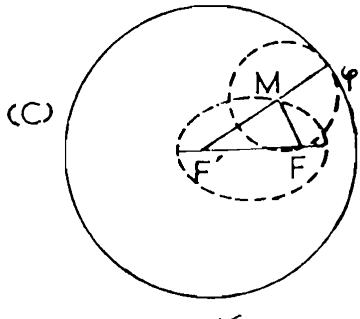
$$N_1F + N_1F' > 2a$$

ه - خواص دایرهٔ هادی در بیضی

۲۱- تعریف - فاصلهٔ نقطه از دایره - هرگاه از یك نقطه مانند **M** به مرکز دایره وصل کنیم ، خط واصل دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ **M** از نزدیکترین آن نقاط را فاصلهٔ **M** از دایره می‌نامیم.

۲۲ - قضیه - هر نقطهٔ بیضی ، از یك کانون و از دایرهٔ هادی کانون دیگر به یك فاصله است .

برهان - هرگاه **M** (شکل ۱۶) نقطه‌ای از بیضی و **(C)** دایرهٔ هادی کانون F' باشد وشعاعی که بر **M** می‌گذرد دایرهٔ **(C)** رادر φ قطع کند ، در بیضی :



شکل ۱۶

$$MF+MF'=2a$$

و در دایرهٔ هادی :

$$M\varphi+MF'=2a$$

در نتیجه :

$$MF=M\varphi$$

یعنی فاصلهٔ **M** از کانون **F** مساوی فاصلهٔ آن از دایرهٔ هادی کانون دیگر است .

نتیجهٔ۱- هرگاه از نقطهٔ غیر مشخص φ واقع بر دایرهٔ هادی F' به کانون **F** وصل و عمود منصف $F\varphi$ را رسم کنیم تاشعاع $F'\varphi$ را در **M** قطع کند ، **M** نقطه‌ای از بیضی خواهد بود .

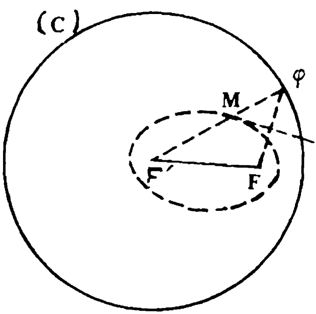
این نتیجه را می‌توان برای رسم بیضی بکار برد . (شمارهٔ ۲۳ را درهمین فصل ببینید) .

نتیجهٔ۲ - با استفاده از قضیهٔ فوق ونتیجهٔ ۱، و با توجه به‌اینکه دایره‌ای که به مرکز M و به شعاع MF رسم شود بر φ می‌گذرد و در φ بر (C) مماس است ، بیضی را می‌توان به این دوصورت تعریف‌کرد :

اول - بیضی مکان هندسی نقاطی است که از یك دایره و یك نقطهٔ ثابت واقع در درون آن به‌یك فاصله باشند .

دوم - بیضی مکان هندسی مراکز دوایری است‌که بریك دایرهٔ ثابت مماس باشند وهمواره بر نقطهٔ ثابتی که در داخل آن دایره است بگذرند. آن نقطهٔ ثابت یك‌کانون و مرکز دایرهٔ ثابت کانون دیگر و شعاع آن دایره عدد ثابت بیضی است .

و - رسم بیضی به‌کمك دایره‌های مهم

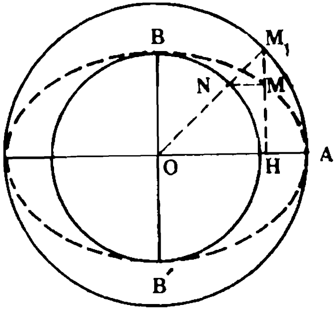


شکل ۱۷

۲۳ - رسم بیضی به‌کمك دایرهٔ هادی - اگر (C) دایرهٔ هادی یکی ازکانونهای بیضی، مثلاً کانون F′ ، باشد (شکل ۱۷)، از F ، کانون دیگر ، به یك نقطهٔ غیرمشخص φ از این دایره وصل می‌کنیم و عمود منصف φF را می‌کشیم تا $F'\varphi$ را در M قطع کند . همانطورکه دیدید (نتیجهٔ ۱ شمارهٔ ۲۲) ، M یك نقطه از بیضی است .

φ را که تغییر دهیم نقاط دیگر بیضی بدست می‌آیند.

۲۴- رسم بیضی به کمك دایرهٔ اصلی- دو دایرهٔ هم مرکز به قطرهای AA' (یعنی $2a$) و BB' (یعنی $2b$) رسم می‌کنیم (شکل ۱۸). از O شعاع دلخواه OM_1 را می‌کشیم تا دایرهٔ کوچکتر را در N قطع کند. از N خطی موازی AA' و از M_1 خطی عمود بر آن رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. M یکی از نقاط بیضی است، زیرا که در مثلث M_1OH:

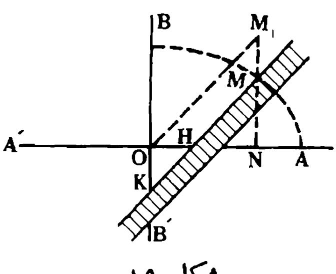


شکل ۱۸

$$\frac{HM}{HM_1}=\frac{ON}{OM_1}=\frac{b}{a}$$

با تغییر شعاع OM_1، نقاط دیگر بیضی بدست می‌آیند.

۲۵- رسم بیضی به وسیلهٔ نوار کاغذی- هرگاه AA' و BB' (شکل ۱۹) محورهای بیضی باشند، نواری از کاغذ اختیار می‌کنیم و طولهای MK و MH را بترتیب مساوی a و b بر روی لبهٔ آن جدا می‌کنیم. به این ترتیب نقاط M، H و K بر روی لبهٔ نوار مشخص می‌شوند. آنگاه نوار کاغذ را چنان



شکل ۱۹

بر روی صفحه جابجا می‌کنیم که H و K بترتیب بر محورهای بزرگ و

کوچك حرکت کنند . در این‌صورت نقطهٔ M روی بیضی منظور جابجا خواهد شد . دلیل این امر آن است که اگر از O خطی موازی KM رسم کنیم تا عمودی‌راکه از M بر AA' فرود می‌آید در M_1 قطع‌کند، شکل $OKMM_1$ متوازی‌الاضلاع است و $OM_1=KM$ ؛ در مثلث ONM_1 خط HM موازی OM_1 است ، پس :

$$\frac{NM}{NM_1}=\frac{HM}{OM_1}=\frac{HM}{KM}=\frac{b}{a}$$

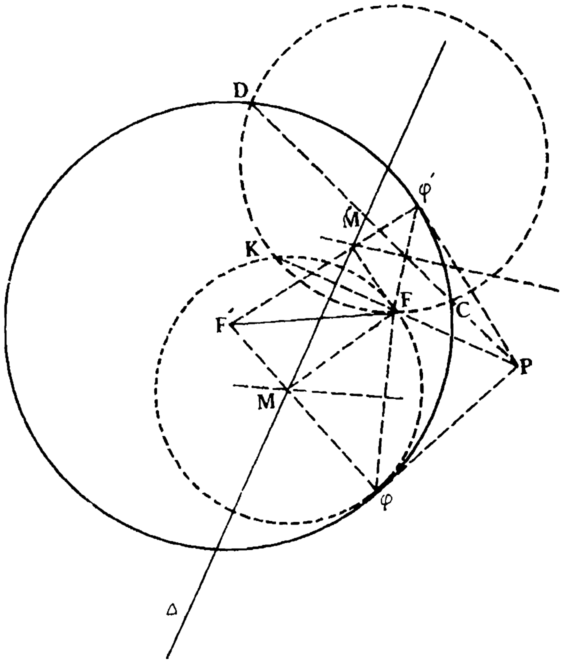
اما مکان M_1 دایره‌ای‌است به‌مرکز O و به شعاع a ؛ پس مکان M بیضیی است‌که این دایره ، دایرهٔ اصلی آن و AA' و BB' بترتیب محور بزرگ و محور کوچك آن می‌باشند .

ز - تقاطع و مماس و تقارن

۳۶ - تعیین فصل مشترك خط و بیضی - هرگاه خط Δ بیضی را در نقطه‌ای مانند M قطع کند (شکل۲۰) ، دایره‌ای‌که به مرکز M و شعاع MF رسم‌کنیم در φ بر دایرهٔ هادی‌کانون F' مماس خواهدبود.

بعکس ، نقاط تقاطع Δ با بیضی ، مراکز دوایری **هستند** که بر F بگذرند و بر دایرهٔ هادی کانون F' مماس باشند .

اما این دوایر بر K ، قرینهٔ F نسبت به خط Δ ، نیز می‌گذرند (زیراکه مراکزشان بر خط Δ است)؛ پس برای تعیین نقاط تقاطع Δ و بیضی‌کافی است‌که مراکز دوایری‌را بدست‌آوریم که بر F و K بگذرند



شکل ۲۰

و بر دایرهٔ هادی کانون F' مماس باشند . حل این مسئله را در (شمارهٔ ۲۰ فصل چهارم بخش اول این کتاب) دیده‌اید ؛ در اینجا یک بار دیگر راه حل آن را ذکر می‌کنیم :

بر F و قرینه‌اش K نسبت به Δ ، دایرهٔ دلخواهی می‌گذرانیم تا دایرهٔ هادی کانون F' را در C و D قطع کند ؛ وتر مشترک CD را امتداد می‌دهیم تا امتداد KF را در P قطع کند (P نسبت به دایرهٔ هادی و دایرهٔ اختیاری و دوایری که می‌خواهیم رسم کنیم دارای یک قوت است). از P دو مماس $P\varphi$ و $P\varphi'$ را بر دایرهٔ هادی رسم کرده از F' به

φ و φ' وصل می‌کنیم (یا عمودمنصفهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ را رسم می‌کنیم) تا Δ را در M و M' (نقاط تقاطع Δ و بیضی) قطع کنند .

بحث ــ سه حالت ممکن است اتفاق افتد:

اول ــ K ، قرینهٔ F نسبت به Δ ، داخل دایرهٔ هادی کانون F' است . می‌دانیم که هرگاه دو نقطه در داخل دایره‌ای باشند ، همواره می‌توان دو دایره برآنها مرور دادکه برآن دایره مماس باشند ، (شمارهٔ ۲۵ از فصل چهارم بخش اول این کتاب) ، یعنی:

هرگاه قرینهٔ یك کانون نسبت به خطی در داخل دایرهٔ هادی کانون دیگر باشد، آن خط بیضی را در دو نقطه قطع می‌کند .

دوم ــ نقطهٔ K روی دایرهٔ هادی کانون F' است . در این حال نقطهٔ P وبنابراین نقاط φ و φ' بر K منطبقند وخط Δ با بیضی‌فقط یك نقطهٔ مشترك دارد که روی شعاع $F'\varphi$ قرار دارد ، و می‌گوییم که خط Δ بر بیضی مماس است .

ازروی تعریف مماس نیز به‌همین‌نتیجه می‌رسیم . زیرا اگر قاطع Δ در حول M دوران کند تا M' به M نزدیك شود، φ' هم‌به φ نزدیك خواهدشد وسرانجام ، وقتی که خط Δ آنقدر در حول M دوران‌کندکه M' بر M منطبق شود ، یعنی قاطع درحد بر بیضی مماس شود ، φ' هم بر φ منطبق می‌شود و نقطهٔ K نیز ، که همواره بین φ و φ' است ، بر φ قرار می‌گیرد ، پس :

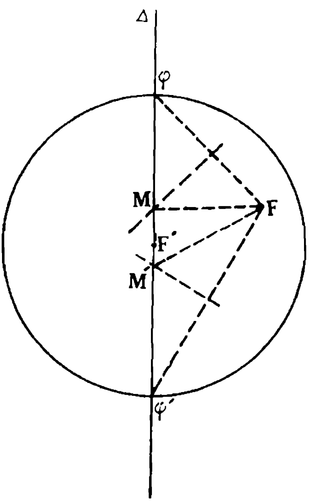
شرط لازم وکافی برای آنکه خطی بر بیضی مماس باشد این‌است‌که

قرینهٔ یک‌کانون نسبت به آن خط ، بر روی دایرهٔ هادی کانون دیگر واقع شود.

دراین حال نقطهٔ تماس، محل تقاطع خط است با شعاعی که‌مرکز دایرهٔ هادی‌را به قرینهٔ کانون دیگر نسبت به خط وصل می‌کند (شکل ۲۲) .

سوم - نقطهٔ K قرینهٔ F نسبت به خط Δ خارج دایرهٔ هادی کانون ´F است . دراین‌حال خط Δ با بیضی نقطهٔ مشترك ندارد (چرا؟).

حالت‌خاص - اگر خط Δ بر یك کانون بیضی بگذرد ، دایرهٔ هادی همان کانون را ، در φ و ´φ قطع می‌کند (شکل ۲۱). حال اگر از کانون دیگر به φ و ´φ وصل کنیم و عمودمنصفهای خطوط واصل را بکشیم تا Δ را در M و ´M قطع‌کنند ، M و ´M نقاط تقاطع مطلوبند، زیراکه از یك‌کانون و دایرهٔ هادی کانون دیگر به یك فاصله‌اند .



شکل ۲۱

نتیجهٔ ۱ - قرینه‌های هر کانون بیضی نسبت به خطوط مماس بیضی ، بر دایرهٔ هادی کانون دیگر واقعند .
یا به عبارت دیگر ، **دایرهٔ هادی هر کانون ، مکان هندسی قرینه‌های کانون دیگر نسبت به خطوط مماس است .**

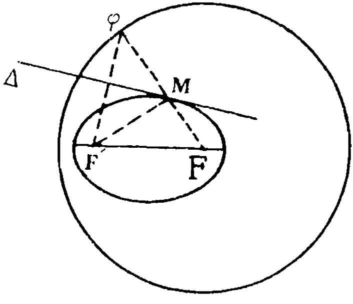
بنا براین اگر از نقطهٔ دلخواه φ واقع بر دایرهٔ هادی کانون F (شکل ۲۲) به‌کانون ´F وصل کنیم ، عمود منصف ´Fφ بر بیضی مماس است و نقطهٔ تماس ، نقطهٔ مشترك این مماس

با شعاع $F\varphi$ است.

نتیجهٔ۲ ـ مماس بر بیضی زاویهٔ بین یك شعاع حامل نقطهٔ تماس و امتداد شعاع حامل دیگر را نصف می‌کند.

زیرا که اگر Δ (شکل ۲۲) خط مماس و φ قرینهٔ کانون F' نسبت به Δ ، و M نقطهٔ تماس باشد، سه نقطهٔ F ، M و φ بر یك امتدادند و در مثلث متساوی‌الساقین $F'M\varphi$ ، Δ، عمود منصف قاعده، نیمساز زاویهٔ رأس است.

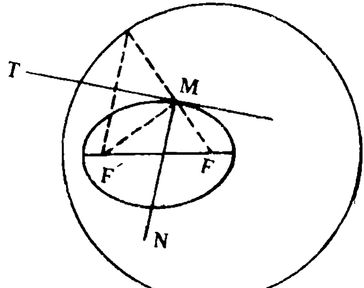
۲۷ ـ قائم بر بیضی ـ قائم بر بیضی در هر نقطه ، مانند قائم بر هرمنحنی دیگر ، خطی است که در آن نقطه بر مماس همان نقطه عمود شود ؛ در شکل ۲۳ ، MN قائم بر بیضی است .



شکل ۲۲

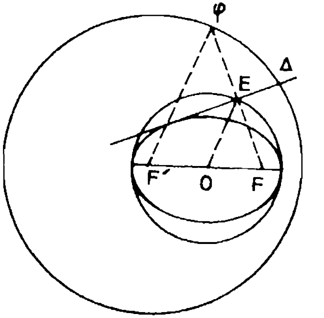
قائم بر بیضی در هر نقطه ، نیمساز زاویهٔ بین شعاعهای حامل آن نقطه است .

زیراکه بر مماس آن نقطه که نیمساز زاویهٔ بین یك شعاع حامل وامتداد دیگری است عمود می‌باشد (شکل ۲۳) .



شکل ۲۳

۲۸ ـ قضیه ـ تصویر هر کانون بیضی برروی هرخط مماس بر آن ، روی‌دایرهٔ اصلی واقع‌است.



شکل ۲۴

برهان - چنانچه Δ خط مماسی بر بیضی باشد (شکل ۲۴) وکانون F را بر روی آن در E تصویر کنیم وقرینهٔ F را نسبت به آن‌خط φ بنامیم و از O به E و از F´ به φ وصل کنیم ، درمثلث FF´φ خط OE ، که ازوسط یك ضلع به وسط ضلع دیگررسم شده است ، موازی است با F´φ و مساوی است با $\frac{F'\varphi}{۲}$ ، پس OE = a ، یعنی E روی دایرهٔ اصلی است، بعکس اگر ازنقطهٔ E از دایرهٔ اصلی عمودی بر خط EF اخراج کنیم این‌خط بر بیضی مماس است، زیراکه اگر از F´ به قرینهٔ F نسبت به عمود مذکور وصل کنیم ، طول خط واصل دوبرابر OE یعنی ۲a است ، یعنی قرینهٔ F نسبت به‌این‌خط روی دایرهٔ هادی (F´) است .

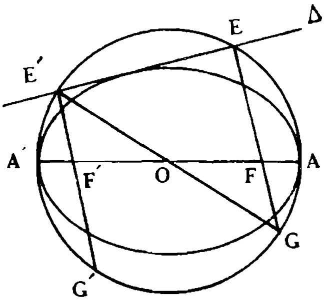
مطالبی‌را که گذشت می‌توان چنین نیز بیان‌کرد :

مکان‌هندسی تصاویر کانونهای بیضی برروی خطوط مماس بر آن ، دایرهٔ اصلی بیضی است .

۲۹ - قضیه - حاصل‌ضرب فاصله های دوکانون بیضی از هرخط مماس برآن ، مساوی است با مقدار ثابت $b^۲$ (مربع نصف محور کوچك).

برهان - هرگاه Δ ، خط مماس بر بیضی ، دایرهٔ اصلی‌را در E و E´ قطع‌کند (شکل۲۵) ، E و E´ تصویرهای F و F´ برخط مماسند، امتداد EF و E´F´ دایرهٔ اصلی‌را در G و G´ قطع می‌کنند و از قائمه بودن $\hat{E}$ نتیجه می‌گیریم‌که E´G برمرکز دایره می‌گذرد؛ چون دومثلث

$OE'F'$ و OFG متساویند (چرا ؟) ، داریم : $F'E' = FG$؛ بنابراین بترتیب می‌توانیم بنویسیم :



شکل ۲۵

$$FE.F'E' = FE.FG$$
$$= FA.FA' \qquad \text{(چرا ؟)}$$
$$= (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$$

ح - مسائل مربوط به خط مماس بر بیضی

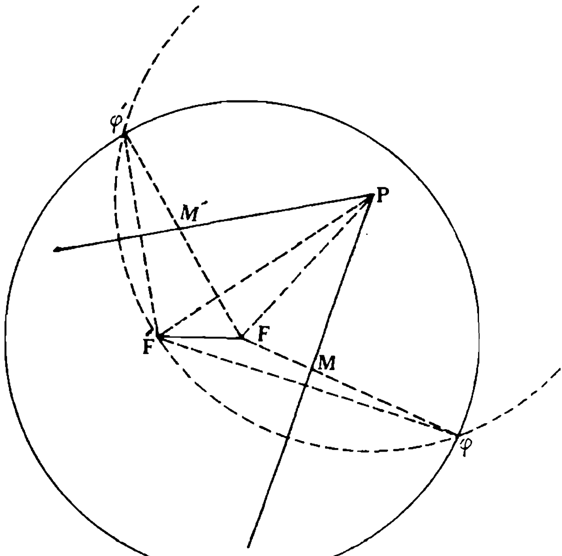
۳۰ - مسئله - رسم مماس بر بیضی از نقطهٔ P - اولاً اگر P روی بیضی باشد ، شعاعهای حامل PF و PF′ را وصل کرده نیمساز زاویهٔ بین FP و امتداد F′P را رسم می‌کنیم (نتیجهٔ ۲ از شمارهٔ ۲۶ همین فصل).

ثانیاً اگر P درخارج بیضی باشد ، به مرکز P دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر یکی ازکانونها ، مثلاً F′ ، بگذرد (شکل ۲۶) و دایرهٔ هادی کانون دیگر را در φ و φ' قطع کند ؛ عمودمنصفهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$

مماسهای مطلوبند و نقاط تماس ، نقاط تلاقی آنها با شعاعهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ است .

شرط لازم وکافی برای آنکه بتوان از P دومماس بر بیضی رسم کرد این است که دو دایره متقاطع باشند، یعنی بتوان مثلثی ساخت که اضلاع آن مساوی قطعه‌خطهای PF (خط‌المرکزین دو دایره) و PF' و $2a$ شعاعهای دو دایره باشند پس باید داشته باشیم :

$$|PF-PF'|<2a<PF+PF'$$



شکل ۲۶

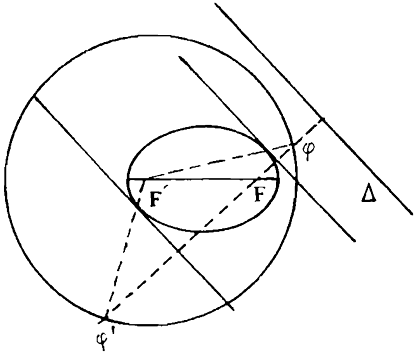
اما بآسانی می‌توان تحقیق کرد که نامساوی $|PF-PF'|<2a$ همواره برقرار است ، در این صورت تنها شرط لازم و کافی برای آنکه

بتوان از P بر بیضی دو مماس رسم کرد این است که :

$$PF+PF'>2a$$

یعنی P خارج بیضی باشد .

۳۱ ــ مسئله ــ رسم مماس بر بیضی به موازات امتداد معین- راه اول- استفاده از دایرهٔ هادی - اگر Δ امتداد مفروض باشد (شکل ۲۷) ، از یک کانون بیضی، مثلاً F ، عمودی بر آن فرود می‌آوریم تا دایرهٔ هادی کانون دیگر را در φ و φ' قطع کند، عمودمنصفهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ مماسهای مطلوبند و نقاط تماس ، برروی شعاعهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ قرار دارند .



شکل ۲۷

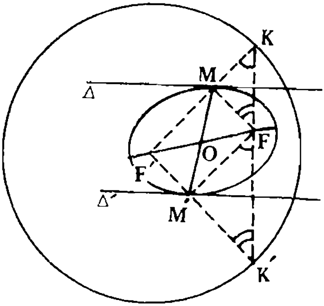
همیشه می‌توان دو مماس به موازات امتداد معین بر بیضی رسم کرد ، زیرا خطی که از یک نقطهٔ درون دایره بر Δ عمود می‌شود ، آن دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

راه دوم ــ استفاده از دایرهٔ اصلی - عمودی که از یکی از دو کانون ، مثلاً از F ، بر Δ رسم می‌شود ، دایرهٔ اصلی را در دو نقطهٔ E و E_1 قطع می‌کند ، خطوطی که از E و E_1 به موازات Δ رسم شوند مماسهای مطلوبند .

۳۲ ــ قضیه ــ خط واصل بین نقاط تماس مماسهای متوازی بر بیضی

از مرکز بیضی می‌گذرد و نقاط تماس نسبت به مرکز بیضی قرینهٔ یکدیگرند.

برهان - اگر Δ و Δ' (شکل ۲۸) دو مماس متوازی و M و M' نقاط تماس و K و K' قرینه‌های کانون F نسبت به آن مماسها باشند، مثلثهای متساوی‌الساقین KMF و $KF'K'$ در زاویهٔ K مشترکند، پس:



شکل ۲۸

$$\widehat{MFK}=\widehat{F'K'K}$$

و در نتیجه:

$$F'M' \parallel MF$$

و به دلیل مشابه

$$\widehat{F'KF}=\widehat{M'FK'}$$

و در نتیجه:

$$M'F \parallel F'M$$

بنابراین شکل $MF'M'F$ متوازی‌الاضلاع است و دوقطر آن MM' و FF' منصف یکدیگرند، یعنی MM' از O، مرکز بیضی، می‌گذرد و در آن نقطه نصف می‌شود.

۳۳ - قضایای پونسله (Poncelet) - **هرگاه از نقطه‌ای دو مماس بر بیضی رسم کنیم:**

اولاً - زاویهٔ بین هر مماس وخطی‌که آن نقطه‌را به‌یك‌کانون وصل می‌کند، مساوی است بازاویهٔ بین مماس دیگر وخط واصل بین آن‌نقطه و کانون دیگر.

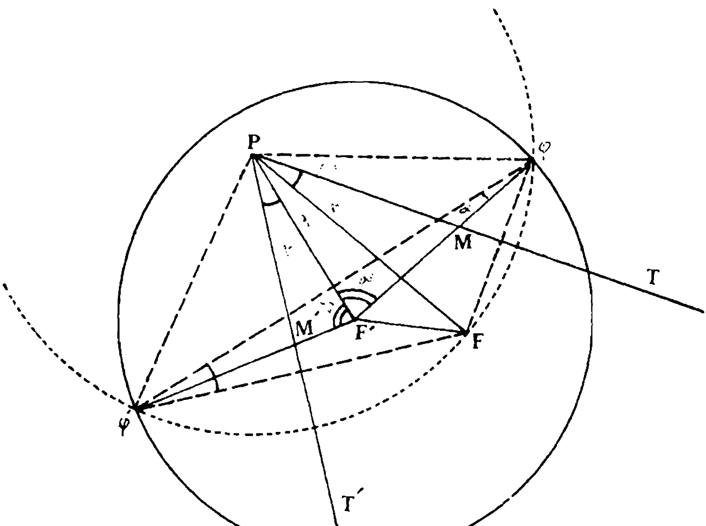
ثانیاً - خطی که نقطهٔ مفروض، یعنی نقطهٔ تقاطع دو مماس، را به یك‌کانون وصل می‌کند، نیمساز زاویهٔ بین‌شعاعهای حامل واصل از آن‌کانون به دو نقطهٔ تماس است.

برهان ـ فرض می‌کنیم که PT و PT′ مماسهایی باشند که از نقطهٔ P بر بیضی رسم شده‌اند (شکل ۲۹) . قرینه‌های F نسبت به این دومماس را φ و φ' می‌نامیم .

اولاً ـ می‌خواهیم ثابت‌کنیم که مثلاً زاویه‌های FPT و F′PT′ متساویند .

درمثلث متساوی‌الساقین $FP\varphi$ ، زاویهٔ FPT نصف‌زاویهٔ مرکزی $FP\varphi$ است ، پس :

$$\widehat{FPT}=\frac{۱}{۲}\widehat{F\varphi}$$



شکل ۲۹

اما اندازهٔ زاویهٔ محاطی $F\varphi'\varphi$ نیز نصف قوس $F\varphi$ است، یعنی:

$$\widehat{F\varphi'\varphi}=\frac{۱}{۲}\widehat{F\varphi}$$

بنابراین :
$$\widehat{FPT}=\widehat{F\varphi'\varphi} \qquad (۱)$$

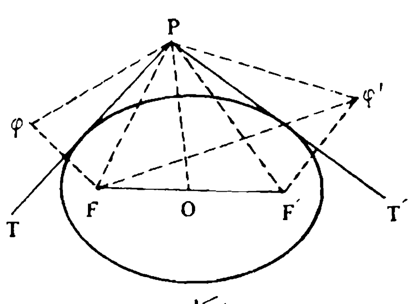
از طرف دیگر اضلاع دو زاویهٔ $F\varphi'\varphi$ و $F'PT'$ بر هم عمودند (PT' عمودمنصف $F\varphi'$ است و وتر مشترك $\varphi'\varphi$ بر خطالمرکزین $F'P$ عمود است) ، پس :
$$\widehat{F'PT'}=\widehat{F\varphi'\varphi} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ دو تساوی ۱ و ۲ نتیجه میگیریم که :
$$\widehat{FPT}=\widehat{F'PT'}$$

ثانیاً ــ چون $F'\varphi'$ بر M' ، نقطهٔ تماس بیضی با PT' ، و $F'\varphi$ بر M ، نقطهٔ تماس بیضی با PT ، میگذرد ، میخواهیم ثابتکنیم که دو زاویهٔ $PF'\varphi'$ و $PF'\varphi$ متساویند .

دو مثلث $PF'\varphi$ و $PF'\varphi'$ که نسبت به PF' قرینهٔ یکدیگرند متساویند و در نتیجه :
$$\widehat{PF'\varphi'}=\widehat{PF'\varphi}$$

۳۴ ــ زاویهٔ بین دو مماس ــ هرگاه PT و PT' مماسهایی باشند که از P بر بیضی رسم شدهاند (شکل ۳۰)، وزاویهٔ بین آنها Θ باشد، چنانچه φ و φ' قرینههای F و F' را نسبت به دو مماس پیدا کنیم ، چنین خواهیم داشت :



شکل ۳۰

$$\widehat{TPF}=\widehat{TP\varphi}$$

و
$$\widehat{T'PF'}=\widehat{T'P\varphi'}$$

اما به موجب قضیهٔ پونسله :

$$\widehat{TPF}=\widehat{T'PF'}$$

پس :
$$\widehat{T'P\varphi'}=\widehat{TP\varphi}=\widehat{TPF}$$

یعنی اگر زاویهٔ TPF را از Θ برداریم و به‌باقیماندهٔ آن، زاویهٔ $T'P\varphi'$ را اضافه کنیم در اندازهٔ Θ تغییری حاصل نمی‌شود ؛ خلاصه می‌توانیم چنین بنویسیم :

$$\hat{\Theta}=\widehat{TPT'}=(\widehat{TPT'}-\widehat{TPF})+\widehat{T'P\varphi'}$$
$$=\widehat{FPT'}+\widehat{T'P\varphi'}$$
$$=\widehat{FP\varphi'}$$

اما در مثلث $PF\varphi'$ ، داریم :

$$F\varphi'^{۲}=PF^{۲}+P\varphi'^{۲}-۲PF\cdot P\varphi'\cdot\cos\Theta$$

در این تساوی چون به جای $P\varphi'$ مساوی آن PF' ، و به جای $F\varphi'$ مقدار ۲a را قرار داده $\cos\Theta$ را حساب‌کنیم ، چنین خواهیم داشت:

$$\cos\Theta=\frac{PF^{۲}+PF'^{۲}-۴a^{۲}}{۲PF\cdot PF'}$$

چون جای نقطهٔ P معلوم است ، طرف دوم تساوی اخیر مقداری است معلوم و می‌توان Θ را از روی جدول نسبتهای مثلثاتی بدست‌آورد.

۳۵ ـ حالت خاص ـ وقتی که دو مماس بر هم عمود باشند ـ در

این حالت $\cos\Theta=0$ و در نتیجه $PF^2+PF'^2-4a^2=0$ ، یعنی : $PF^2+PF'^2=4a^2$ (۱) . اما اگرمرکز بیضی را O بنامیم (شکل۳۰)، در مثلث PFF' داریم :

$$PF^2+PF'^2=2PO^2+2OF^2$$

و چون به جای طرف اول ، مقدار $4a^2$ را قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

$$4a^2=2PO^2+2c^2$$

که از آنجا :

$$PO^2=2a^2-c^2=a^2+(a^2-c^2)=a^2+b^2$$

وبالاخره : $PO=\sqrt{a^2+b^2}$

یعنی : مکان هندسی نقاطی که از آنها می‌توان دومماس عمودبرهم بر بیضی رسم کرد ، دایره‌ای است که مرکز آن O ، مرکز بیضی ، و شعاعش جذر مجموع مربعهای نصف محورهای بیضی است. این دایره را دایرهٔ مونژ (Monge) می‌نامند .

تمرین

یك بیضی با معلومات زیر بسازید [۱] :

۱ـ یك کانون ، یك مماس ، ۲a و ۲b .

۲ـ دو کانون و یك مماس .

۳ـ یك کانون و سه مماس .

۴ـ یك کانون ، دو مماس و یك نقطهٔ تماس .

۵ـ ۲a ، مرکز ، دو مماس .

۶ـ A ، یك کانون ، یك مماس .

۷ـ یك کانون ، دو مماس ، یك نقطه .

۸ـ یك کانون ، یك مماس ، دو نقطه .

۹ـ یك کانون و سه نقطه .

۱۰ـ یك کانون ، یك رأس محور بزرگ، یك نقطه .

۱۱ ـ از ذوزنقه‌ای یك قاعده و طول قاعدهٔ دیگر و مجموع دو ساق در دست است :

الف ـ مکان هندسی دو رأس متحرك را بدست آورید .

ب ـ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دو ساق را تعیین‌کنید .

ج ـ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دو قطر چیست ؟

۱۲ ـ در مثلثی ضلع BC ثابت است و مقدار حاصل ضرب

---

۱ ـ مقصود از ساختن یك بیضی ، یا یك هذلولی ، بدست آوردن دو کانون وعدد ثابت ۲a است . مقصود از ساختن سهمی بدست آوردن کانون و خط هادی است .

برای ساختن یك بیضی ، یا یك هذلولی یا یك سهمی ، باید پنج شرط داده شود .گذشتن مقطع مخروطی **از یك نقطه** بمنزلهٔ **یك شرط** است . همچنین داشتن یك مماس یا خروج ازمرکزیا امتداد یك مجانب (درهذلولی) بمنزلهٔ یك شرط است . اما داشتن یك‌کانون، یا یك هادی ، یا مرکز، یا یك مجانب (در هذلولی) هر یك بمثابهٔ دو شرط است .

$AB.AC.\cos^2\frac{A}{2}$ نیز ثابت است . مکان هندسی رأس A چیست ؟

۱۳ - M نقطه‌ای است از یك بیضی . قائم بر بیضی در M ، محورها را در N و N' قطع می‌کند . ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{MN}{MN'}=\frac{b^2}{a^2}$$

۱۴- قائم بر بیضی در نقطهٔ M ، محورها را در N و N' ومماس بر بیضی در همان نقطه ، محورها را در T و T' قطع می‌کنند . ثابت‌کنیدکه :

$$MT.MT'=MN.MN'$$

۱۵- اگر M نقطه‌ای از بیضی و H پای عمودی باشد که از M بر AA' فرود آید ، ثابت‌کنیدکه $\frac{MH^2}{HA.HA'}$ مقداری است ثابت .

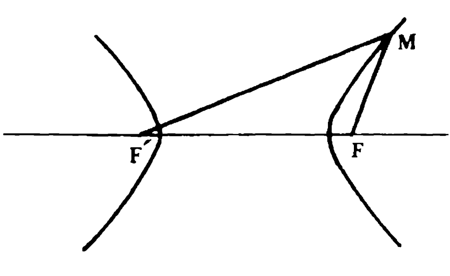
فصل سوم

هذلولی

الف ـ مقدمات

۱ ـ تعریف ـ هذلولی مکان هندسی نقاطی است از یك صفحه که تفاضل فواصلشان از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مساوی مقدار ثابتی باشد.

دو نقطهٔ ثابت را **دو کانون** هذلولی می‌گویند و معمولاً آنها را به F و F' نمایش می‌دهند. مقدار ثابت را به $2a$ می‌نمایند و آن را **عددثابت** هذلولی می‌خوانند. فاصلهٔ بین دو کانون را **فاصلهٔ کانونی** هذلولی می‌نامند و به $2c$ نمایش می‌دهند. اگر M نقطه‌ای از هذلولی باشد (شکل ۱)، از مثلث MFF' که درآن هر ضلع بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر، واضح می‌شود که $2a<2c$ یا $a<c$.



شکل ۱

هرگاه M به کانون F نزدیکتر باشد،

$MF'-MF=2a$ و اگر به F' نزدیکتر باشد، $MF-MF'=2a$.

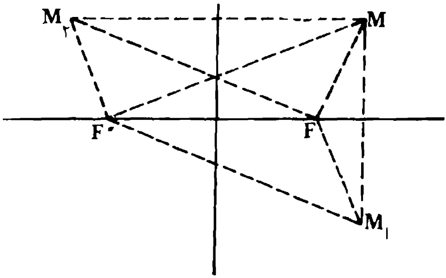
MF و MF' را **شعاعهای حامل** نقطهٔ M می‌گویند . واضح است که این دوشعاع حامل می‌توانند هر مقدار بزرگ را احراز کنند ، پس بر روی هذلولی نقاطی می‌توان یافت که بسیار دور باشند .

۲ ـ قضیه ـ هذلولی دارای دو محور تقارن عمود بر هم است که یکی FF' و دیگری عمودمنصف آن می‌باشد .

برهان ـ فرض می‌کنیم که M روی هذلولی باشد ؛ M_1 قرینهٔ آن را نسبت به FF' پیدا می‌کنیم (شکل ۲) . چون FF' عمود منصف MM_1 است ، دومثلث MFM_1 و $MF'M_1$ متساوی‌الساقینند و داریم :

$$M_1F'=MF' \text{ و } M_1F=MF$$

و از آنجا :
$$M_1F'-M_1F=MF'-MF=2a$$



شکل ۲

پس M_1 نیز روی هذلولی است ، یعنی FF' محور تقارن آن است. حال M_2 قرینهٔ M را نسبت به عمود منصف FF' بدست می‌آوریم . چهار ضلعی $MFF'M_2$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است (به چه دلیل ؟) و داریم :

$$M_2F=MF' \text{ و } M_2F'=MF$$

و از آنجا :
$$M_2F-M_2F'=MF'-MF=2a$$

پس M_2 نیز روی هذلولی است ، یعنی عمودمنصف FF' ، محور تقارن آن است .

۳ - قضیه - وسط FF' مرکز تقارن هذلولی است.

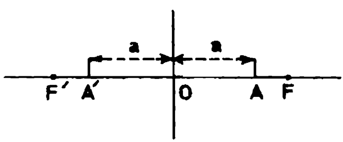
برهان - زیرا هرگاه یك منحنی دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد ، نقطهٔ تقاطع آن دو محور ، مرکز تقارن آن منحنی است.

این قضیه را می‌توان مستقیماً نیز ، با استدلالی مانند آنچه در همین باره در بیضی آوردیم ، ثابت کرد (اثبات بر عهدهٔ دانش آموزان است).

۴ - رأسها و محورهای هذلولی - هذلولی دارای دو شاخهٔ متمایز است ، که در دو طرف عمودمنصف FF' قرار دارند ، زیرا که **اولا** این عمودمنصف محور تقارن است و **ثانیاً** هیچیك از نقاط آن روی هذلولی نمی‌تواند باشد (چرا؟) .

شاخه‌ای از هذلولی‌راکه در طرف کانون F است شاخهٔ‌کانون F و شاخهٔ دیگررا شاخهٔ کانون F' می‌نامند .

اگر O وسط FF' باشد و بر FF' طولهای $OA=OA'=a$ را جدا کنیم (شکل۳) ، داریم :



شکل ۳

$$AF'-AF=A'F-A'F'=AA'=2a \text{ و } AF=A'F'=c-a،$$

یعنی A و A' روی هذلولی و محل برخورد FF' با دو شاخهٔ آن می‌باشند .

A و ´A را دو **رأس**، خط نامحدود ´FF را که این دورأس روی آنند **محورقاطع** یا **محور کانونی** وطول پاره‌خط ´AA را طول **محور قاطع** هذلولی می‌نامند.

بطوری که دیدیم ، هذلولی محور تقارن دیگر خود را قطع نمی‌کند . اما چون بین هذلولی و بیضی شباهتهایی است، بر روی عمودـ منصف ´AA طولهای : $OB=OB'=\sqrt{c^۲-a^۲}$ را جدا می‌کنیم و B و ´B را دو رأس محور غیر قاطع هذلولی می‌نامیم . طول این محور را به ۲b نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت :

$$b^۲=c^۲-a^۲ \qquad و \qquad b=\sqrt{c^۲-a^۲}$$

پس هذلولی دارای دو محور است: محور قاطع یا محورکانونی‌و محور غیر قاطع. محور را گاهی **قطر** هم می‌گویند. محل تقاطع‌محورها را **مرکزهذلولی** می‌نامند .

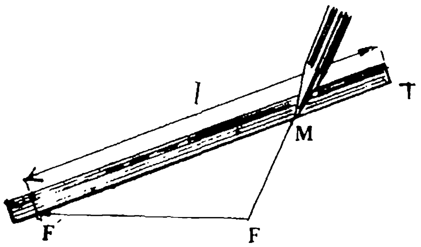
۵- وقتی‌که در هذلولی $a=b$ ، یعنی دو محورآن‌متساوی‌باشند، هذلولی‌را **متساوی‌المحورین**، یا **متساوی‌الساقین** یا**متساوی‌القطرین** می‌نامند و داریم :

$$a=b=\frac{c\sqrt{۲}}{۲}$$

۶- رسم هذلولی - به دو راه می‌توان هذلولی را رسم کرد . یکی با حرکت مداوم و دیگری به وسیلهٔ نقطه‌یابی . اما باید در نظر داشت که ترسیم هذلولی با حرکت مداوم شکل تقریبی آن را بوجود می‌آورد .

اینك طریقهٔ ترسیم هذلولی از هر دو راه بیان می‌شود :

I ـ ترسیم هذلولی با حرکت مداوم ـ ستّاره‌ای بقدر کافی بلند، به طول l اختیار می‌کنیم و یك‌سر آن را در یکی از دوکانون نگاه می‌داریم بطوری‌که بتواند حول این کانون دوران کند (شکل۴) ؛ مثلاً سنجاقی را از سوراخ کوچکی گذرانده روی کانون F' نگاه می‌داریم وستّاره را حول آن دوران می‌دهیم . نخی بطول $l-۲a$ اختیار کرده یك سر آن را درانتهای T ستّاره و سر دیگررا در کانون دیگرهذلولی ثابت نگاه می‌داریم . نوك مدادی را چنان‌قرارمی‌دهیم که نخ را بکشد ودرنقطه‌ای مانند M به ستّاره متکی شود . M نقطه‌ای است از هذلولی ، زیراکه :



شکل ۴

$$MF' - MF = (TF' - TM) - MF$$
$$= TF' - (TM + MF)$$

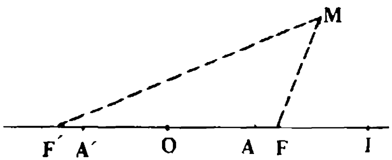
طول نخ ــ طول ستّاره =

$$= l - (l - ۲a) = ۲a$$

حال اگر ستّاره را حول F' دوران دهیم ، نوك مدادکه باکشیدن نخ به ستّاره متکی نگاه داشته می‌شود قوسی از شاخهٔ کانون F را رسم خواهدکرد . هرگاه عمل را تکرارکنیم درحالی‌که ستّاره را حول‌کانون

F دوران دهیم ، نوك مداد قوسی از شاخهٔ کانون ´F را خواهدکشید .

II - ترسیم هذلولی با نقطه‌یابی - اگر F و ´F دو کانون و A و ´A دو رأس هذلولی باشند(شکل۵) ، بر امتداد ´FF نقطه‌ای مانند I اختیار می‌کنیم ؛ دهانهٔ پرگار را نخست به اندازهٔ IA بازکرده به مرکز F و به شعاع IA قوسی می‌زنیم؛



شکل ۵

سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ´IA بازکرده به مرکز کانون دیگر یعنی ´F و به شعاع ´IA قوسی می‌زنیم تا قوس سابق را در M قطع کند. M یك نقطه ازهذلولی است، زیراکه :

$$MF' - MF = IA' - IA = AA' = ۲a$$

با تغییر I نقاط دیگری از هذلولی بدست می‌آید .

I باید همیشه در خارج پاره‌خط F´F اختیار شود ، زیرا که در مثلث MF´F ، مجموع دوضلع $MF' + MF$ یعنی $IA' + IA = ۲OI$ (O وسط ´FF) باید بزرگتر از $FF' = ۲OF$ باشد؛ پس نتیجه می‌شود که باید OI بزرگتر از OF باشد یعنی I خارج ´FF اختیار شود .

۷ - خروج از مرکز هذلولی - در هذلولی ، مانند بیضی ، نسبت $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز** می‌نامند. خروج‌ازمرکز هذلولی‌همواره

از ۱ بزرگتر است و اگر مساوی ۱ شود (یعنی $a=c$ و در نتیجه $b=o$ شود) ، هذلولی تبدیل به دو نیم‌خط می‌شود که در دوطرف مرکز امتداد دارند و بر کانونها می‌گذرند ، یعنی تمام نقاط خط نامحدود FF' که در دو طرف F و F' باشند متعلق به مکانند .

۸- دایرهٔهادی و اصلی - در هذلولی ، مانند بیضی ، دایره‌ای راکه مرکزآن یک‌کانون وشعاع آن مساوی $2a$ باشد ، **دایرهٔ هادی** آن کانون می‌نامند و دایره‌ای که مرکز آن مرکزهذلولی و شعاعش مساوی a باشد ، **دایرهٔ اصلی** نامیده می‌شود . هذلولی دارای دو دایرهٔ هادی است .

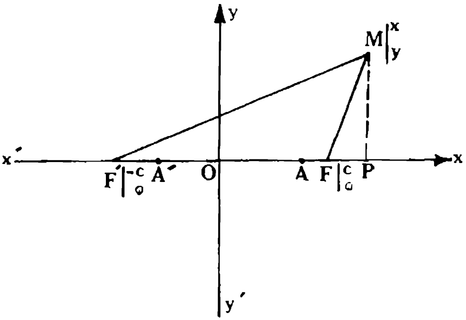
ب - معادلهٔ هذلولی

۹- محاسبهٔ شعاعهای حامل در هذلولی - محورقاطع‌رامحور طولها و محور غیر قاطع را محور عرضها اختیار می‌کنیم . به این ترتیب مرکز هذلولی، مبدأ مختصات می‌شود. مختصات هر نقطهٔ M ازهذلولی را x و y می‌نامیم (شکل ۶) .

در شکل ۶ برای نقاطی‌که روی شاخهٔ‌کانون F هستند ، x مثبت و برای نقاطی که روی شاخهٔ کانون F' قرار دارند ، x منفی است.

با روشی شبیه به‌آنچه درمحاسبهٔ شعاعهای حامل بیضی بکاربردیم، طول شعاعهای حامل نقطهٔ M را بدست می‌آوریم؛ اما برحسب‌آنکه M

بر شاخهٔ کانون F یا بر شاخهٔ کانون ´F واقع باشد ، در محاسبه اندکی اختلاف است ، به این شرح :



شکل ۶

اگر M بر شاخهٔ F واقع باشد

$$MF' > MF$$

$$MF^{۲} = (x-c)^{۲} + y^{۲}$$

$$MF'^{۲} = (x+c)^{۲} + y^{۲}$$

$$MF'^{۲} - MF^{۲} = ۴cx$$

پس از تجزیهٔ طرف اول :

$$۲a(MF' + MF) = ۴cx$$

پس :

$$\begin{cases} MF' + MF = \frac{۲cx}{a} \\ MF' - MF = ۲a \end{cases}$$

پس از حل دستگاه :

$$MF' = \frac{cx}{a} + a$$

$$MF = \frac{cx}{a} - a$$

اگر M برشاخهٔ ´F واقع باشد

$$MF > MF'$$

$$MF^{۲} = (x-c)^{۲} + y^{۲}$$

$$MF'^{۲} = (x+c)^{۲} + y^{۲}$$

$$MF^{۲} - MF'^{۲} = -۴cx$$

پس از تجزیهٔ طرف اول :

$$۲a(MF + MF') = -۴cx$$

پس :

$$\begin{cases} MF + MF' = \frac{-۲cx}{a} \\ MF - MF' = ۲a \end{cases}$$

پس از حل دستگاه :

$$MF = -\frac{cx}{a} + a = -(\frac{cx}{a} - a)$$

$$MF' = -(\frac{cx}{a} + a)$$

یعنی در هرحال ، با فرض آنکه جهت OF با جهت Ox متحد باشد ، داریم :

$$MF' = \left| \frac{cx}{a} + a \right|$$

$$MF = \left| \frac{cx}{a} - a \right|$$

۱۰ ـ معادلهٔ هذلولی ـ هرگاه محورهای مختصات را مطابق شکل ۶ بر محورهای هذلولی منطبق اختیار کنیم و از M عمود MP را بر x'x فرود آوریم ، در مثلث قائم‌الزاویهٔ MF'P :

$$(۱) \qquad MF'^{۲} = PM^{۲} + F'P^{۲}$$

و چون :

$$PM = |y| \quad \text{و} \quad F'P = |x + c| \qquad \text{و} \qquad MF' = \left| \frac{cx}{a} + a \right|$$

داریم : $\left(\frac{cx}{a} + a\right)^{۲} = y^{۲} + (x + c)^{۲}$

که پس از ساده‌کردن حاصل می‌شود :

$$a^{۲} + \frac{c^{۲}x^{۲}}{a^{۲}} = y^{۲} + x^{۲} + c^{۲}$$

یا : $x^{۲}\left(\frac{c^{۲} - a^{۲}}{a^{۲}}\right) - y^{۲} = c^{۲} - a^{۲}$

یا : $\frac{b^{۲}x^{۲}}{a^{۲}} - y^{۲} = b^{۲}$

و پس از تقسیم دوطرف بر $b^{۲}$ ، معادلهٔ هذلولی چنین می‌شود :

$$\boxed{\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱}$$

بعکس ، با استدلالی شبیه به‌آنچه در مورد بیضی دیدید، می‌توان ثابت کرد که هر نقطه که مختصاتش در این معادله صدق کند ، متعلق به هذلولی مفروض است .

هرگاه هذلولی متساوی‌المحورین باشد ، معادله به این صورت در می‌آید :

$$\boxed{x^۲-y^۲=a^۲}$$

ج ـ داخل و خارج هذلولی

۱۱ ـ هذلولی صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند: یکی ناحیه‌ای که شامل کانونهای منحنی است (شکل ۷) ؛ این ناحیه را که مرکب از دو قسمت و در شکل هاشور زده شده است **داخل هذلولی** می‌نامند ؛ دیگری ناحیه‌ای‌که شامل‌کانونها نیست؛ به این ناحیه، **خارج هذلولی** گفته می‌شود. ناحیهٔ خارجی شامل مرکز و محور غیرقاطع هذلولی است.

هر پاره‌خط که یك نقطهٔ خارجی را به یك نقطهٔ داخلی ، مثلاً کانون وصل کند ، هذلولی را در یك نقطه و فقط در یك نقطه قطع می‌کند .

هر پاره‌خط که دو نقطهٔ داخلی را به هم وصل می‌کند ، یا با

هذلولی نقطهٔ مشترك ندارد یاآن را در دو نقطه قطع می‌کند.

۱۲ ـ قضیه ـ تفاضل فواصل هر نقطهٔ واقع در خارج هذلولی از دوکانون آن کوچکتر است از ۲a و تفاضل فواصل هر نقطهٔ واقع در داخل هذلولی از دوکانون آن بزرگتر است از ۲a .

برهان ـ هرگاه N نقطه‌ای در خارج هذلولی باشد (شکل۷) ، پاره‌خط NF هذلولی را در M قطع می‌کند . در مثلث $MF'N$:

$$NF' < NM + MF'$$

از دو طرف این نامساوی ، NF راکه کم‌کنیم خواهیم داشت :

$$NF' - NF < NM + MF' - NF$$

حال اگر در طرف دوم نامساوی اخیر به جای NF مساوی آن NM+MF را قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

$$NF' - NF < NM + MF' - NM - MF$$

یا :

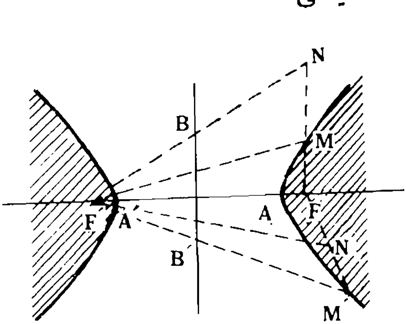
$$NF' - NF < MF' - MF$$

یعنی :

$$NF' - NF < 2a$$

و اما اگر N' نقطه‌ای در داخل هذلولی باشد ، امتداد FN' هذلولی را در M' قطع می‌کند . در مثلث $M'N'F'$:

$$N'F' + M'N' > M'F'$$



شکل ۷

از دو طرف این نامساوی ، **M´F** را که‌کم‌کنیم خواهیم داشت:

$$N'F' + M'N' - M'F > M'F' - M'F$$

حال اگر در طرف اول نامساوی اخیر به جای **M´F** مساوی آن

M´N´+N´F را قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

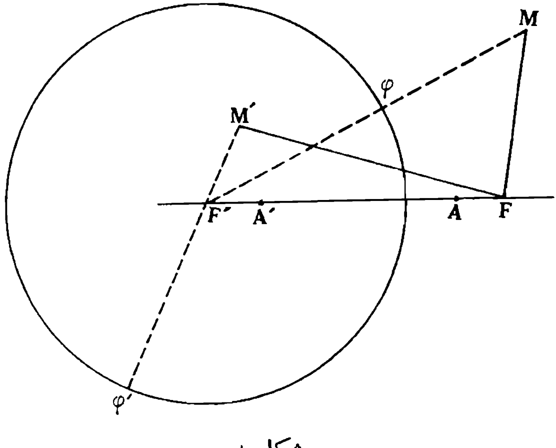
$$N'F' + M'N' - M'N' - N'F > M'F' - M'F$$

یا : $N'F' - N'F > M'F' - M'F$

یعنی : $N'F' - N'F > ۲a$

د ـ خواص دایره‌های هادی

۱۳ ـ هرگاه **M** ، نقطه‌ای از هذلولی متعلق به شاخهٔ کانون **F** باشد (شکل ۸) ، **MF´** بزرگتر از **MF** است و پاره‌خط **MF´** دایرهٔ



شکل ۸

هادی کانون F' را در یك نقطهٔ φ ، بین F' و M ، تلاقی می‌کند ؛ از مقایسهٔ دو تساوی :

$$MF' - MF = ۲a$$

و $$MF' - M\varphi = ۲a$$

نتیجه می‌شود که : $$MF = M\varphi$$

و هرگاه M' نقطه‌ای متعلق به شاخهٔ کانون F' باشد (شکل ۸)، $M'F$ بزرگتر از $M'F'$ است و یکی از نقاط تقاطع $M'F'$ و دایرهٔ هادی حتماً خارج پاره‌خط $M'F'$ و در امتداد $M'F'$ است ؛ اگر آن را φ' بنامیم ، از طرفی :

$$M'\varphi' - M'F' = ۲a$$

و ازطرفی دیگر : $$M'F - M'F' = ۲a$$

از مقایسهٔ این دوتساوی نتیجه می‌شود :

$$M'\varphi' = M'F$$

در هرحال دایره‌ای که مرکزش یك‌نقطه (M یا M') ازهذلولی باشد و بر یك‌کانون بگذرد ، بر دایرهٔ هادی‌کانون دیگر مماس می‌شود (در حالت اول مماس خارج و در حالت دوم مماس داخل) .

بر عکس اگر M مرکز دایره‌ای باشدکه از F بگذرد وبر دایرهٔ F' در نقطه‌ای مانند φ مماس شود (مماس خارج) طول خط‌المرکزین MF' مساوی با مجموع دو شعاع است یعنی :

$$MF' = MF + ۲a$$

پس :
$$MF' - MF = ۲a$$

و اگر M' مرکز دایره‌ای باشد که بر F بگذرد و بر دایرهٔ F' درنقطه‌ای مانند φ' مماس شود (مماس داخل) طول خطالمرکزین $M'F'$ برابر تفاضل دو شعاع است یعنی :

$$M'F' = M'\varphi' - F'\varphi'$$

یا :
$$M'F' = M'F - ۲a$$

پس
$$M'F - M'F' = ۲a$$

در هرحال نقطهٔ M و M' روی هذلولی است .

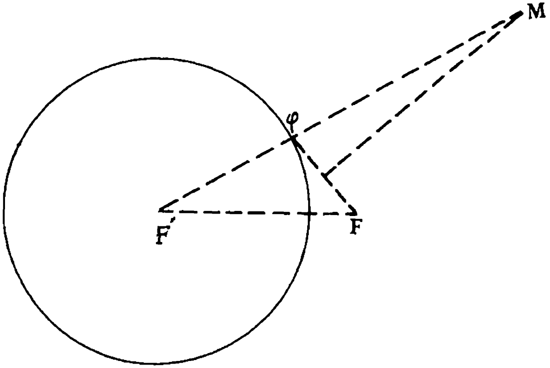
از آنچه گذشت ، قضیه وخاصیت مهم زیر ، برای هذلولی نتیجه می‌شود :

قضیه : I ـ هر هذلولی مکان هندسی مراکز دوایری است‌که از یکی از دوکانون بگذرند و بر دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس شوند .

II ـ مکان هندسی مراکز دوایری که بر دایرهٔ مفروضی مماس باشند و بر یك نقطهٔ ثابت خارج آن دایره بگذرند ، هذلولی‌ای است که نقطهٔ ثابت ومرکز دایرهٔ مفروض کانونهای آن و شعاع دایرهٔ مفروض برابر طول محور قاطع آن است .

۱۴ ـ رسم هذلولی به کمك دایرهٔ هادی ـ هرگاه کانون F (شکل ۹) را به‌یك نقطهٔ φ از دایرهٔ هادی کانون دیگر هذلولی وصل کرده عمودمنصف $F\varphi$ را رسم‌کنیم تا امتداد شعاع نقطهٔ φ را درنقطه‌ای

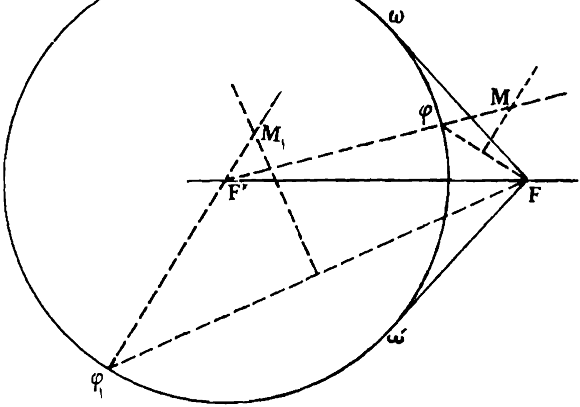
مانند **M** قطع کند ، **M** نقطه‌ای از هذلولی است . با تغییر نقطهٔ φ می‌توان نقاط متعدد از هذلولی را بدست آورد ومنحنی را بطور تقریب رسم‌کرد .



شکل ۹

بحث ـ هرگاه ازیکی از دوکانون ، مثلاً از **F** ، دو مماس $F\omega$ و $F\omega'$ را بر دایرهٔ هادی کانون دیگر رسم کنیم (شکل ۱۰) ، نقاط تماس ، دو قوس از آن دایره جدا می‌سازند که یکی بزرگتر و دیگری کوچکتر از نصف دایره است . اگر نقطهٔ اختیاری یعنی φ روی قوس کوچکتر ازنیمدایره اختیار شود، نقطهٔ **M** که بدست می‌آید روی شاخهٔ کانونی است که بیرون دایره است ، یعنی دراین‌شکل روی‌شاخهٔ‌کانون **F** است ؛ واگر نقطهٔ اختیاری به وضع φ_1 روی قوس بزرگتر اختیار شود ، نقطهٔ M_1 که با همان روش بدست می‌آید متعلق به شاخهٔ کانونی است که دایرهٔ هادی آن رسم شده است ، یعنی در اینجا روی شاخهٔ کانون F' است .

هرگاه φ بر ω یا ω'، نقاط تماس، اختیار شود شعاع ماربرآن با عمودمنصف φF موازی می‌شود و آن را قطع نمی‌کند یا در بینهایت



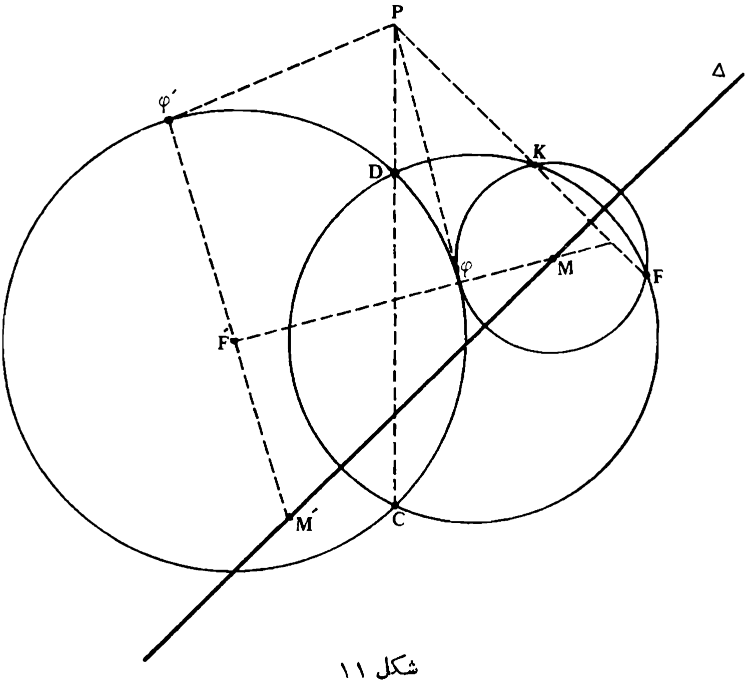
شکل ۱۰

دور قطع می‌کند، یعنی بدین ترتیب نقطهٔ بینهایت دور منحنی بدست می‌آید. عمودمنصفهای ωF و $\omega' F$ را، همانطور که بعداً خواهید دید، مجانبهای هذلولی می‌نامند. این دو عمودمنصف از مرکز هذلولی می‌گذرند.

ه ـ قاطع و مماس وقائم

۱۵ ـ تعیین فصل مشترك خط و هذلولی ـ هرگاه خط Δ هذلولی را در M قطع کند (شکل ۱۱)، دایره‌ای‌که به مرکز M رسم شود وبر F بگذرد، در φ بر دایرهٔ هادی F' مماس می‌شود؛ اما چون

مرکزاین دایره بر روی Δ است ، دایره بر K قرینهٔ F نسبت به Δ نیز می‌گذرد .



شکل ۱۱

پس هر نقطهٔ تلاقی خط Δ با هذلولی ، مرکز دایره‌ای است که بر F و قرینه‌اش K نسبت به Δ بگذرد و بردایرهٔ هادی کانون دیگر مماس شود .

بنا بر این برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی Δ و هذلولی چنین عمل می‌کنیم : بر F وقرینه‌اش نسبت به Δ دایرهٔ دلخواهی چنان می‌گذرانیم

که دایرهٔ هادی کانون F' را در نقاطی مانند C و D قطع کند ؛ وتر مشترك CD را امتداد می‌دهیم تا امتداد FK را در P تلاقی کند ؛ از P دو مماس $P\varphi$ و $P\varphi'$ را بردایرهٔ هادی رسم می‌کنیم تا نقاط تماس φ و φ' بدست‌آیند . نقطهٔ تلاقی Δ با $F'\varphi$ ، یعنی M ، و همچنین نقطهٔ تلاقی Δ با $F'\varphi'$ ، یعنی M' ، نقاط مطلوبند (مسئلهٔ شمارهٔ ۲۵ ازفصل چهارم بخش اول این‌کتاب).

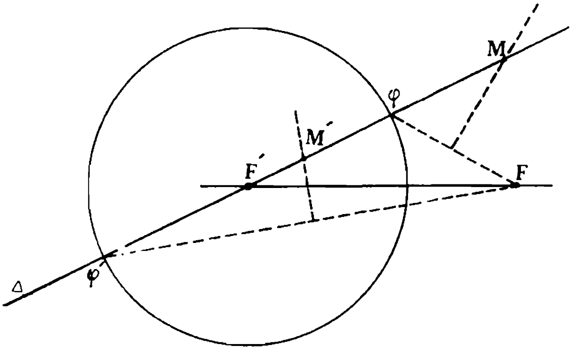
بحث ـ هرگاه K ، قرینهٔ F نسبت‌به Δ ، خارج دایرهٔهادی‌کانون F' واقع شود ، دو نقطهٔ تقاطع بدست می‌آید و هرگاه K بر روی آن دایرهٔ هادی قرار گیرد ، بطوری‌که در مورد بیضی بتفصیل دیدیم (تکرار استدلال بر عهدهٔ دانش‌آموز است) ، خط Δ بر هذلولی مماس است . اگر K در داخل دایرهٔهادی واقع شود Δ با هذلولی نقطهٔ مشترك ندارد.

اگر مماسهای $F\omega$ و $F\omega'$ را بر دایرهٔ هادی F' رسم کنیم (در شکل این‌دومماس رارسم کنید ونقاط تماس را ω و ω' بنامید)، برحسب آنکه نقاط φ و φ' روی قوس کوچك $\omega\omega'$ یاقوس بزرگ $\omega\omega'$ واقع‌شود، نقاط تقاطع خط وهذلولی روی شاخهٔ کانون F یا شاخهٔ‌کانون F' است.

هرگاه نقطهٔ K ، قرینهٔ F نسبت‌به Δ ، خارج زاویهٔ $\omega F\omega'$ واقع شود ، هریك از دو نقطهٔ تقاطع روی یك شاخهٔ هذلولی است ، و اگر نقطهٔ K در داخل آن زاویه قرار گیرد ، هر دو نقطهٔ تقاطع روی یك شاخه است ؛ وبالاخره اگر K روی یکی از دو مماس $F\omega$ و $F\omega'$ واقع شود ، یکی از نقاط تقاطع در بینهایت دور است (یعنی Δ موازی یکی

از دو مجانب است) .

حالت خاص ـ اگر خط Δ بر یك کانون هذلولی بگذرد (شکل ۱۲) ، دایرهٔ هادی همان کانون را در φ و φ' قطع می‌کند . حال اگر از کانون دیگر به φ و φ' وصل کرده عمودمنصفهای خطوط واصل را رسم‌کنیم تا Δ را در M و M' قطع کنند، M و M' نقاط تقاطع مطلوبند (شمارهٔ ۱۴ همین فصل) .

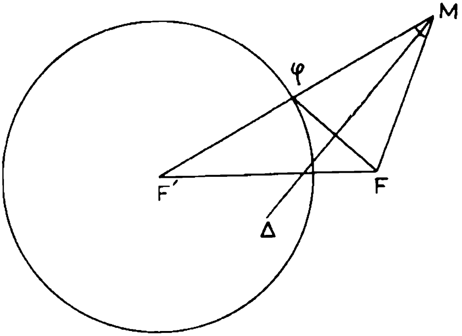


شکل ۱۲

نتیجهٔ ۱ ـ قرینه‌های کانون هذلولی نسبت به خطوط مماس بر هذلولی روی دایرهٔ هادی‌کانون دیگر قرار دارند وبعکس عمودمنصف هر پاره‌خطی‌که‌یك کانون را به یك نقطه از دایرهٔ هادی‌کانون دیگر وصل‌کند، بر هذلولی مماس است .

به عبارت دیگر ، **دایرهٔ هادی هرکانون ، مکان هندسی قرینه‌های کانون دیگر نسبت به خطوط مماس بر هذلولی است .**

نتیجهٔ ۲ ـ مماس برهذلولی زاویهٔ بین شعاعهای حامل نقطهٔ تماس را نصف می‌کند .



شکل ۱۳

زیرا اگر Δ (شکل۱۳) خط مماس و φ قرینهٔ کانون F نسبت به Δ و M نقطهٔ تماس باشد ، سه نقطهٔ F' ، φ و M بر یك امتدادند و در مثلث متساوی‌الساقین $FM\varphi$ خط Δ که عمودمنصف قاعده است زاویهٔ رأس را نصف می‌کند .

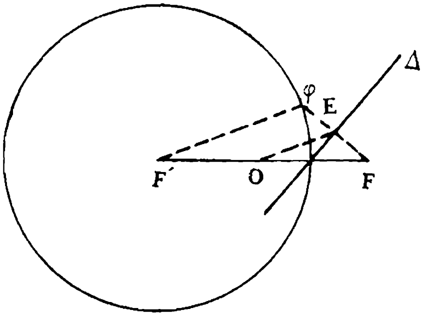
۱۶ ـ خطی که از نقطهٔ تماس بر مماس هذلولی عمود شود ، **قائم بر هذلولی** در آن نقطه نامیده می‌شود .

قائم بر هذلولی درهر نقطه، زاویهٔ بین یك شعاع حامل وامتداد شعاع حامل دیگر را نصف می‌کند ، زیرا که بر مماس آن نقطه که نیمساززاویهٔ بین شعاعهای حامل نقطهٔ تماس است عمود می‌باشد .

۱۷ ـ قضیه ـ تصویرکانون هذلولی بر روی خط مماس بر آن ، بر روی دایرهٔ اصلی واقع است .

برهان ـ هرگاه Δ (شکل۱۴) خطی مماس برهذلولی و E تصویر کانون F بر روی آن و φ قرینهٔ کانون F نسبت به آن باشد و از O ، مرکز هذلولی ، به E وصل‌کنیم ، در مثلث $F\varphi F'$ ، خط OE که اوساط دوضلع را به هم مربوط می‌سازد موازی با $F'\varphi$ و مساوی نصف آن است، یعنی $OE=a$ ، و E روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع a ، یعنی روی دایرهٔ اصلی است . بعکس هر نقطه از دایرهٔ اصلی را می‌توان به

دو طریق تصویر یك کانون بر روی یك مماس دانست. این قضیه را به‌این صورت نیز می‌توان بیان کرد :

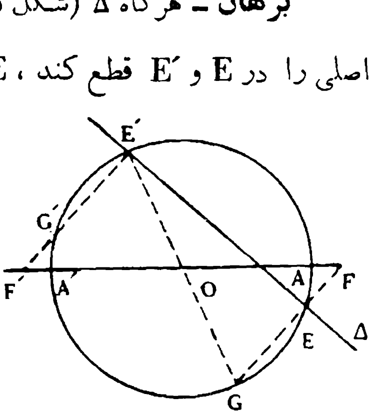


شکل ۱۴

مکان هندسی تصاویر کانونهای یك‌هذلولی روی خطوط مماس‌بر آن، دایرهٔ اصلی آن هذلولی است .

۱۸ ـ قضیه ـ حاصل‌ضرب فاصله‌های دوکانون هذلولی از هرخط مماس بر آن ، مساوی است با مقدار ثابت b^2 .

برهان ـ هرگاه Δ (شکل ۱۵) ، خط مماس بر هذلولی ، دایرهٔ اصلی را در E و E′ قطع کند ، E و E′ تصویرهای کانونها بر روی مماسند و EF و E′F′ بار دیگر دایرهٔ اصلی را در G و G′ قطع می‌کنند؛ از قائمه بودن E نتیجه می‌گیریم که E′G برمرکز دایره می‌گذرد و دو مثلث OGF و OF′E′ متساویند (چرا؟) .



شکل ۱۵

پس :
$$F'E' = FG$$

و
$$FE.F'E' = FE.FG$$

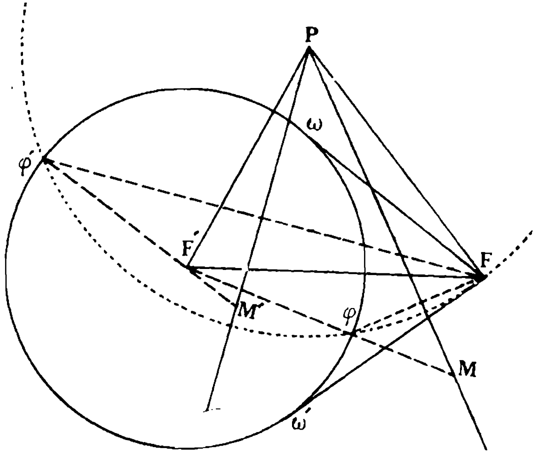
(چرا ؟)
$$= FA.FA'$$
$$= (c-a)(c+a)$$
$$= c^2 - a^2 = b^2$$

و ـ مسائل مربوط به خط مماس برهذلولی

۱۹ ـ مسئله ـ رسم مماس برهذلولی از نقطهٔ P .

اولا اگر P روی هذلولی باشد، نیمساز زاویهٔ بین شعاعهای حامل PF′ و PF را رسم می‌کنیم (نتیجهٔ ۲ ازشمارهٔ ۱۵ همین فصل).

ثانیاً اگر P روی هذلولی نباشد ، به مرکز P دایره‌ای رسم



شکل ۱۶

می‌کنیم که بر یکی از دو کانون ، مثلاً F ، بگذرد (شکل ۱۶) و دایرهٔ هادی کانون دیگر را در φ و φ' قطع کند . عمودمنصفهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ مماسهای مطلوبند و نقاط تماس، M و M'، نقاط تلاقی مماسها باشعاعهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ است .

بر حسب آنکه φ و φ' بر روی قوس کوچك یاقوس بزرگ $\omega\omega'$ باشند ، مماس بر شاخهٔ کانون F یا بر شاخهٔ کانون F' رسم می‌شود .

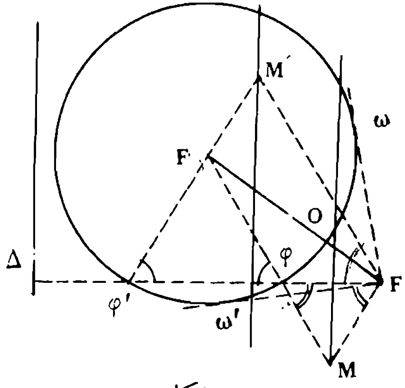
شرط لازم و کافی برای آنکه بتوان دو مماس بر هذلولی از P رسم کرد این است که دو دایره یکدیگر را قطع کنند یعنی باید طول یکی از سه قطعه خط PF' (خط‌المرکزین دو دایره) و PF و $۲a$ (شعاعهای دو دایره) از مجموع دو قطعه‌خط دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر باشد ؛ که می‌توان نوشت :

$$|PF'-PF|<۲a<PF'+PF$$

اما بآسانی می‌توان تحقیق کرد که نامساوی $PF'+PF>۲a$ همواره برقرار است ، در این صورت تنها شرط لازم و کافی این است که $|PF'-PF|<۲a$ یعنی P خارج هذلولی باشد.

۲۵ ـ مسئله ـ رسم مماس بر هذلولی به موازات امتداد معین ـ
اگر Δ (شکل ۱۷) امتدادمفروض باشد، از F عمودی بر آن رسم‌می‌کنیم تا دایرهٔ هادی کانون F' را در φ و φ' قطع کند. عمود منصفهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ مماسهای مطلوبند و نقاط تماس ، بر شعاعهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ قرار دارند .

برای آنکه بتوان چنین مماسهایی رسم کرد باید خطی که از یك کانون بر Δ عمود می‌کنیم دایرهٔ هادی کانون دیگر را قطع کند، یعنی در داخل زاویهٔ ωFω′ واقع‌شود(شکل۱۷).



شکل ۱۷

نتیجه ـ وقتی که بتوان دو مماس متوازی بر هذلولی رسم کرد ، خط واصل بین دونقطهٔ تماس بر مرکز هذلولی می‌گذرد و دونقطهٔ تماس نسبت به مرکز هذلولی قرینهٔ یکدیگرند .

زیرا بآسانی می‌توان دانست‌که شکل FM′F′M متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن ، MM′ و FF′ ، منصف یکدیگرند .

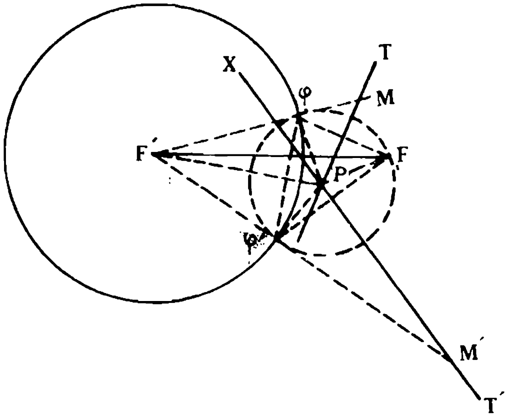
۲۱ ـ قضایای پونسله ـ هرگاه از نقطه‌ای دو مماس بر هذلولی رسم کنیم :

اولاً ـ زاویهٔ بین هر مماس و خطی که آن نقطه را به یك‌کانون وصل می‌کند ، مساوی است با زاویهٔ بین مماس دیگر، یا امتداد آن، وخط واصل از آن نقطه به‌کانون دیگر .

ثانیاً ـ خطی که نقطهٔ مفروض ، یعنی نقطه تقاطع دومماس رابه‌یك کانون وصل می‌کند ، نیمساززاویهٔ بین شعاعهای حامل ، واصل ازآن‌کانون به دو نقطهٔ تماس ، یا نیمساز زاویهٔ بین یکی ازآن شعاعها و امتداد شعاع دیگر است .

برهان ـ فرض می‌کنیم که PT و PT′ مماسهایی باشند که از

نقطهٔ P بر هذلولی رسم شده‌اند (در شکل ۱۸ هر دو مماس بر یك شاخداند و در شکل ۱۹ هر مماس بر یك شاخه است) . قرینه‌های F نسبت به این دو مماس را φ و φ' می‌نامیم .



شکل ۱۸

اولا - در هر دو شکل ، از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین $FP\varphi$ زاویهٔ FPT نصف زاویهٔ مرکزی $FP\varphi$ است ، یعنی نصف قوس $F\varphi$ است ، و از طرف دیگر ، زاویهٔ محاطی $F\varphi'\varphi$ نیز نصف قوس $F\varphi$ است ، پس :

$$\widehat{FPT} = \widehat{F\varphi'\varphi} \qquad (۱)$$

اما در شکل ۱۹ داریم : $\widehat{F'PT'} = \widehat{F\varphi'\varphi}$ ، زیرا اضلاعشان بر هم عمود است. و درشکل ۱۸ داریم : $\widehat{F'PX} = \widehat{F\varphi'\varphi}$، به‌همان دلیل.

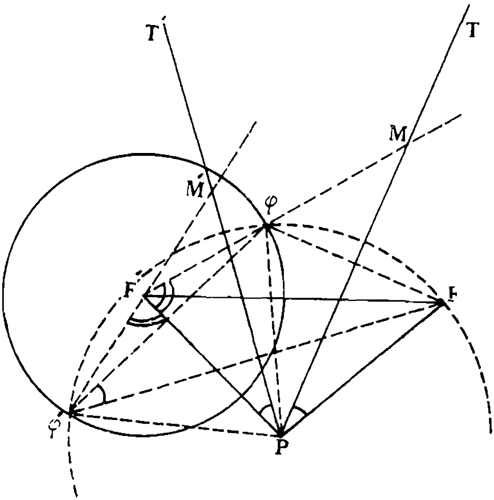
حال اگر هریك از این دو تساوی اخیر را با رابطهٔ ۱ مقایسه کنیم ، نتیجه می‌گیریم :

$$\widehat{FPT} = \widehat{F'PT'} \qquad \text{(در شکل ۱۹)}$$

$$\widehat{FPT} = \widehat{F'PX} \qquad \text{(در شکل ۱۸)}$$

اکنون با توجه به دوشکل ، تساویهای اخیرچنین‌معلوم می‌کنند:

اگر دومماس بریك شاخه رسم شده‌باشد (شکل۱۸) ، زاویهٔ بین یك مماس و خط واصل به یك‌کانون ، مساوی است با زاویهٔ بین امتداد مماس دیگر و خط واصل به کانون دیگر . و اگر دو مماس بر دوشاخه رسم شده باشد (شکل ۱۹) ، زاویه‌های بین دومماس وخط واصل به‌دو کانون باهم برابرند (قسمت اول قضیه).



شکل ۱۹

ثانیاً ـ دو مثلث $PF'\varphi$ و $PF'\varphi'$ که نسبت به PF' قرینهٔ یکدیگرند متساویند و در نتیجه :

$$\widehat{PF'\varphi'} = \widehat{PF'\varphi}$$

این تساوی نیز ، در هریك از دو شکل ، چنین معلوم می‌کند :

اگر دو مماس بر یك شاخه رسم شده باشند ، خطی که از نقطهٔ

تقاطع دو مماس به یک کانون وصل شود ، زاویهٔ بین دو شعاع حامل دو نقطهٔ تماس را نصف می‌کند (شکل ۱۸) . و اگر دو مماس بر دو شاخه رسم شده باشند (شکل۱۹)، آن خط زاویهٔ بین یک شعاع حامل وامتداد شعاع حامل دیگررا نصف می‌کند (قسمت دوم قضیه)

۳۲ ـ قضیهٔ مونژ ـ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می‌توان دومماس عمود برهم برهذلولی رسم‌کرد ، دایره‌ای است به مرکز هذلولی و به شعاع $\sqrt{a^2-b^2}$ (دایرهٔ مونژ) .

برهان ـ این قضیه را می‌توان با استفاده از زاویهٔ بین دو مماس ومانند آنچه در شمارهٔ ۳۴ فصل دوم ، در بارهٔ بیضی ، گفتیم ثابت کرد. اما در اینجا آن را مستقیماً ثابت می‌کنیم .

فرض می‌کنیم که P نقطه‌ای باشد که از آن دو مماس عمود برهم PT و PT′ بر هذلولی رسم شده باشند (شکل ۲۰) . چون PT عمود بر $F\varphi$ و PT′ عمود بر $F\varphi'$ است ، زاویهٔ محاطی $\varphi'F\varphi$ نیزقائمه‌است و در نتیجه $\varphi\varphi'$ قطر دایره و P در وسط $\varphi\varphi'$ واقع است .

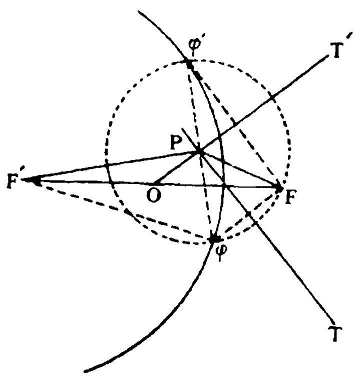
چون در دو دایرهٔ متقاطع، خط‌المرکزین PF′ عمود است بروتر مشترک $\varphi\varphi'$ ، مثلث $PF'\varphi$ قائم‌الزاویه است و داریم :

$$P\varphi^2+PF'^2=F'\varphi^2$$

اما $P\varphi=PF$ و $F'\varphi=2a$

پس :

$$PF^2+PF'^2=4a^2 \qquad (1)$$



شکل ۲۰

از طرفی در مثلث FPF' داریم :

$$(2)\quad PF^2+PF'^2=2PO^2+2OF^2=2PO^2+2c^2$$

اکنون از مقایسهٔ دوتساوی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود :

$$2PO^2+2c^2=4a^2$$

و از آنجا :

$$PO^2=2a^2-c^2=a^2-(c^2-a^2)$$
$$=a^2-b^2$$

یعنی :
$$PO=\sqrt{a^2-b^2}$$

بحث ـ در صورتی ممکن است نقاطی یافت و از آنها دو مماس متعامد بر هذلولی رسم‌کرد که a بزرگتر از b باشد (چرا ؟).

در هذلولی‌متساوی‌المحورین، دایرهٔمونژ تبدیل به‌نقطهٔ O می‌شود (چرا؟)، یعنی درهذلولی متساوی‌المحورین‌فقط از مرکز هذلولی‌می‌توان دومماس متعامد برآن رسم‌کرد . این مماسها ، بطوری که خواهیم دید، مجانبهای هذلولیند .

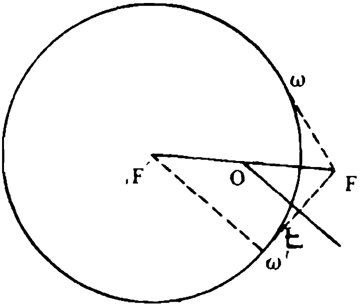
ز ـ مجانبهای هذلولی

۲۳ـ تعریف ـ می‌دانید که مجانب بریك منحنی خطی است که در یك نقطهٔ بینهایت دور بر منحنی مماس شود ؛ یا به عبارت دیگر ، مجانب بر منحنی خطی است‌که فاصلهٔ یك‌نقطهٔ منحنی از آن ، به‌سمت

صفر میل کند وقتی که آن نقطه بر روی منحنی بینهایت دور شود .

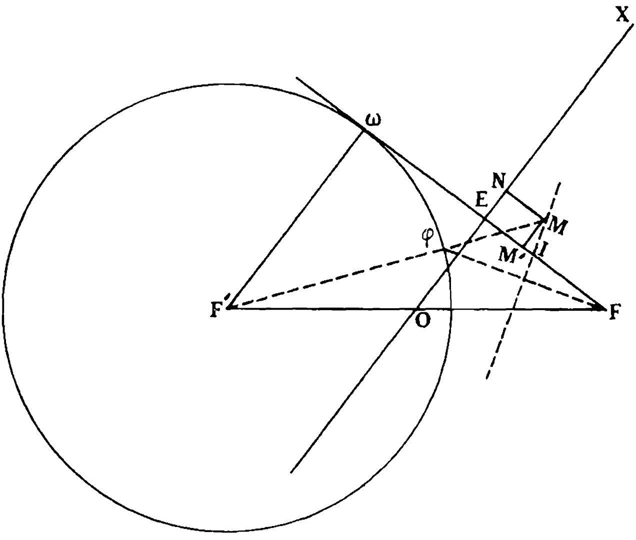
۲۴ ـ قضیه ـ خطی که از مرکز هذلولی ، برمماس مرسوم از یك کانون بر دایرهٔ هادی کانون دیگر عمود شود ، مجانب هذلولی است .

برهان ـ می‌دانیم که عمود منصف $F\omega'$ بر هذلولی مماس است (شکل ۲۱) و نقطهٔ تماس واقع است بر شعاع $F'\omega'$. اما چون $F'\omega'$ با عمودمنصف $F\omega'$ موازی است ، نقطهٔ تماس‌در فاصلهٔ بینهایت دور است . پس عمود منصف $F\omega'$ که بر نقطهٔ O می‌گذرد (چرا ؟) مجانب هذلولی است .



شکل ۲۱

دلیل‌دیگر ـ هرگاه Ox از O بر $F\omega$ عمود شده و آن را در



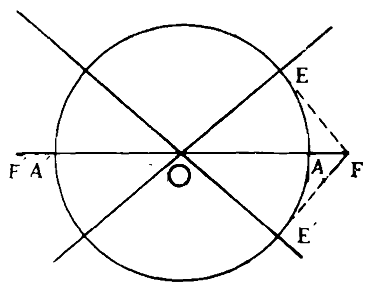
شکل ۲۲

E قطع کرده باشد (شکل ۲۲) و M یك نقطه از هذلولی باشد ، ثابت می‌کنیم که وقتی که M برروی منحنی بینهایت دورشود ، فاصلهٔ آن از Ox به سمت صفر میل می‌کند .

فرض می‌کنیم که M به کمك نقطهٔ φ بدست آمده باشد و عمود منصف $F\varphi$ ،که بر M می‌گذرد ، مماس $F\omega$ را در I قطع‌کرده باشد . از M عمود MN را بر Ox و عمود MM' را بر $F\omega$ فرود می‌آوریم. بدیهی است که $MN=M'E$ ؛ و چون M' بین I و E واقع است : $MN=M'E<EI$. حال هرچه φ به ω نزدیکتر شود ، Mدر روی منحنی دورتر می‌شود و I به E نزدیك می‌شود ؛ و وقتی‌که φ بینهایت‌به ω نزدیك شود ، Mدر روی منحنی بینهایت دورخواهدشد و EI بینهایت کوچك می‌شود ، یعنی I میل می‌کند که بر E منطبق شود ، و MN که در همه‌حال از EI کوچکتر است به سمت صفر میل می‌کند ، پس Ox مجانب هذلولی است ؛ هذلولی دو مجانب دارد .

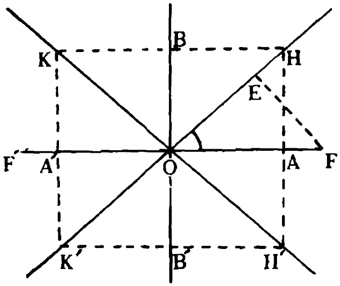
۲۵ ـ رسم مجانبهای هذلولی ـ راه اول ، به کمك دایرهٔ هادی ـ از F مماسهایی بر دایرهٔ هادی کانون F' رسم می‌کنیم وازO دو عمود بر آنها فرود می‌آوریم ؛ این دو عمود مجانبهای هذلولیند .

راه دوم، به‌کمك دایرهٔ اصلی ـ از F دو مماس بر دایرهٔ اصلی رسم می‌کنیم (شکل ۲۳) و از O به نقطه‌های تماس‌وصل‌کرده و از دوطرف ادامه می‌دهیم . این دوخط مجانبهای هذلولیند .



شکل ۲۳

راه سوم ، به کمك محورها- اگر A ، A' ، B و B' رئوس هذلولی باشند (شکل۲۴) ، بر آن نقاط چهار خط موازی محورها می‌گذرانیم تامستطیل $KHH'K'$ بوجود آید ؛ اقطار این چهارضلعی مجانبهای هذلولیند .



شکل ۲۴

زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH :

$$OH^2 = OA^2 + AH^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

و ازآنجا : $OH = c$

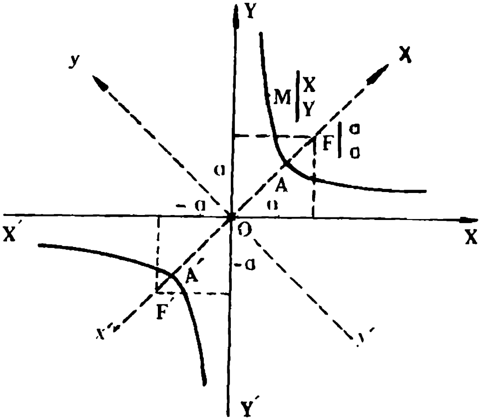
و اگر از F عمود FE را بر قطر $K'H$ فرود آوریم ، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH و OFE ، که در زاویهٔ حادهٔ O اشتراك دارند و وترهایشان باهم برابرند ، متساویند و در نتیجه $OE = OA = a$ ؛ پس E روی دایرهٔ اصلی است ، یعنی نقطهٔ تماس FE با آن دایره است و $K'H$ مجانب هذلولی است .

نتیجهٔ ۱ - تصویر هر کانون روی مجانبها بر دایرهٔ اصلی واقع است.

نتیجهٔ ۲ - درهذلولی متساوی‌المحورین، مجانبها بریکدیگر عمودند.

زیرا شکل $KHH'K'$ (شکل ۲۴) در چنین هذلولی‌ای مربع است.

۲۶ - معادلهٔ هذلولی‌متساوی‌المحورین، چنانچه‌محورهای‌مختصات بر مجانبهای آن منطبق باشند - هرگاه مجانبهای هذلولی متساوی‌المحورین



شکل ۲۵

را OX و OY بنامیم و آنها را محورهای مختصات بگیریم ، مختصات کانون F مساوی a و a و مختصات کانون F′ مساوی $-a$ و $-a$ خواهد بود (نتیجهٔ ۱ ازشمارهٔ ۲۵ همین فصل) . حال اگر مختصات هر نقطهٔ M از منحنی را X و Y فرض کنیم ، چنین خواهیم داشت :

$$MF'^2=(X+a)^2+(Y+a)^2 \tag{1}$$

$$MF^2=(X-a)^2+(Y-a)^2$$

این دو تساوی را که عضو بعضو از هم تفریق کنیم و به جای MF'^2-MF^2 مساوی آن ، $2a(MF'+MF)$ را قراردهیم (با فرض آنکه M روی شاخهٔ کانون F باشد) نتیجه می‌شود :

$$2a(MF'+MF)=4aX+4aY$$

یا :

$$MF'+MF=2(X+Y) \tag{2}$$

از طرفی بافرض آنکه M روی شاخهٔ کانون F باشد ، داریم :

$$MF'-MF=2a \tag{3}$$

اینك اگر ازدستگاه متشکل از دوتساوی ۲ و ۳ ، MF′ را بدست آوریم و در رابطهٔ ۱ قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

$$(a+X+Y)^{۲}=(X+a)^{۲}+(Y+a)^{۲}$$

که پس از ساده‌کردن ، به صورت زیر در می‌آید :

$$XY=\frac{a^{۲}}{۲}$$

و این همان معادلهٔ مطلوب است .

۲۷- چون قدرمطلق فواصل نقطهٔ (X و Y)M از مجانبهای OX و OY بترتیب |Y| و |X| است ، از تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که در هذلولی متساوی‌المحورین ، حاصل‌ضرب فواصل هر نقطهٔ منحنی‌از مجانبهای آن ثابت و مساوی $\frac{a^{۲}}{۲}$ است .

یا به عبارت دیگر ، در هذلولی متساوی‌المحورین ، چنانچه M نقطهٔ غیرمشخصی از آن باشد، مساحت مستطیلی به قطر OM (O مرکز هذلولی است)که اضلاعش بر مجانبها منطبق باشند ، مساوی مقدار ثابت $\frac{a^{۲}}{۲}$ است.

تمرین

هذلولی را با معلومات زیر بسازید :

۱- یك‌کانون ، یك مماس ، ۲a و ۲b .

۲- دوکانون ، یك مماس .

۳- یك‌کانون ، سه مماس .

۴- یك‌کانون ، دو مماس ، یك نقطهٔ تماس .

۵- مرکز ، دو مماس ، ۲a .

۶- یك رأس ، یك‌کانون ، یك مماس .

۷- یك کانون ، دو مماس ، یك نقطه .

۸- یك کانون ، یك مماس ، دو نقطه .

۹- کانون و سه نقطه .

۱۰- یك کانون ، یك مماس ، یك مجانب .

۱۱- یك کانون ، یك مجانب ، $2a$.

۱۲- مکان هندسی مراکز دوایر مماس بر دو دایرهٔ مفروض (متخارج یا متقاطع) چیست ؟

۱۳- سه نقطهٔ A ، B و C پشت سرهم بر خط مستقیمی‌قرار دارند. دایرهٔ متغیری همواره در B بر این خط مماس است . از A و C مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را تلاقی‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ تلاقی چیست ؟

۱۴ - دو خط ثابت ، همواره بر یك هذلولی که یکی از کانونهایش معلوم است مماسند . مکان‌کانون دیگرهذلولی چیست ؟

۱۵- مطلوب است مکان مرکزوکانون دوم یك هذلولی‌که یك‌کانونش ثابت است و همواره بر دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد .

فصل چهارم

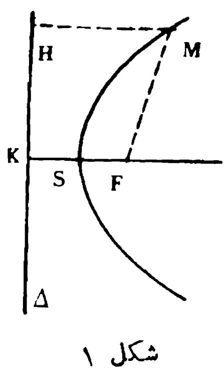
سهمی

الف ـ مقدمات

۱ ـ تعریف ـ سهمی مکان هندسی نقاطی است ازصفحه که از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت متعلق به‌همان صفحه به یك فاصله باشند.

به عبارت دیگر ، **سهمی مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصل هریك از آنها ازیك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت مساوی ۱ باشد.**

نقطهٔ ثابت را **کانون**، خط ثابت را **هادی**، فاصلهٔ کانون ازهادی را **ممیز** یا **پارامتر** می‌گویند. ممیز را به $\mathbf{p}$ نمایش می‌دهند (چون فرض این است که‌کانون روی هادی نباشد ، $\mathbf{p}$ هیچوقت صفر نیست). اگر



شکل ۱

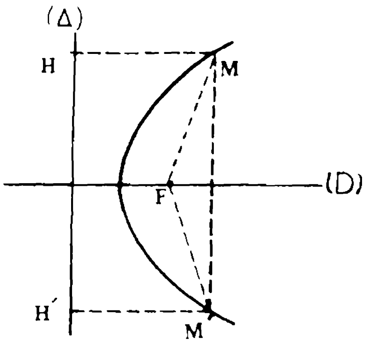
M(شکل ۱) نقطه‌ای از سهمی ، F کانون ، Δ خط هادی و H پای عمود وارد از M بر Δ باشد ، بنا به تعریف ، $MF=MH$ یا $\frac{MF}{MH}=1$. MF را شعاع حامل نقطهٔ M می‌نامند؛ نقطهٔ S ، وسط عمود FK که ازکانون برهادی رسم شده است ، یك نقطه از سهمی است ؛ این نقطه‌را **رأس** سهمی می‌نامند.

(بعداً ثابت خواهیم‌کرد که S نقطهٔ تلاقی‌سهمی بامحور تقارن آن‌است.)

هرگاه دایره‌ای به مرکز M و به‌شعاع MF رسم کنیم در H بر Δ مماس می‌شود ؛ و برعکس هر دایره که از F بگذرد و بر خط Δ مماس‌شود ، مرکزآن روی سهمی قراردارد ؛ پس می‌توان سهمی‌را این‌طور نیز تعریف‌کرد :

سهمی مکان هندسی مراکز دوایری است‌که بر یك نقطهٔ ثابت بگذرند و بر خطی ثابت مماس باشند . نقطهٔ ثابت مفروض کانون و خط ثابت خط هادی آن سهمی است .

۲- خط (D) را از F بر هادی (Δ) عمود می‌کنیم (شکل ۲) .



شکل ۲

اگر M نقطه‌ای از سهمی و M´ قرینهٔ آن نسبت به (D) باشد، در مثلث MFM´ :

$$M'F = MF$$

و در مستطیل MHH´M´ :

$$M'H' = MH$$

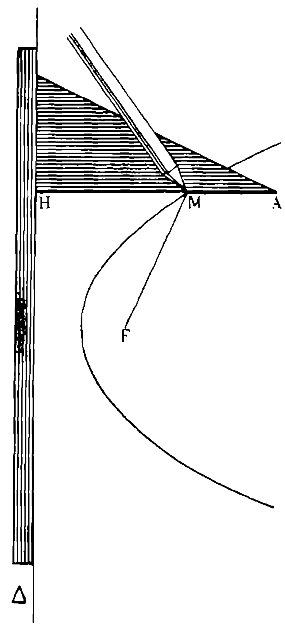
پس $M'F = M'H'$، یعنی M´ روی سهمی است وخطی که ازکانون سهمی برهادی آن عمود شود، محور تقارن سهمی است .

نتیجه - رأس سهمی نقطهٔ تقاطع آن با محور است (چرا ؟) .

۳- رسم سهمی - سهمی را نیز به دو راه می‌توان رسم کرد ؛ یکی با حرکت مداوم و دیگری به وسیلهٔ نقطه‌یابی . ولی باید در نظر

داشت که ترسیم آن با حرکت مداوم ، نتیجه‌ای تقریبی بدست می‌دهد .
اینك طریقهٔ ترسیم سهمی از هر دو راه بیان می‌شود :

I- رسم سهمی با حرکت مداوم - گونیایی که طول ضلع آن l فرض شود اختیار می‌کنیم ؛ نخی هم به طول l اختیار کرده یك سر آن را در F و سر دیگر آن را در انتهای ضلع l گونیا (گوشهٔ حاده) محکم‌می‌کنیم (شکل۳) ؛ بعد گونیا را در مقابل لبهٔ خط‌کشی که روی خط هادی قرار داده شده است می‌لغزانیم بقسمی که همواره ضلع دیگر گونیا بر خط‌کش متکی باشد و نوك مدادی را در داخل نخ‌چنان قرار می‌دهیم که نخ‌را کشیده ودر M به‌گونیا متصل‌سازد؛



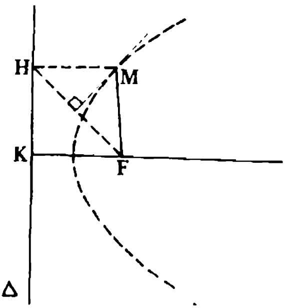
شکل ۳

نوك مداد براثر جابجاشدن‌گونیا قوس کوچکی ازسهمی را رسم‌می‌کند، زیرا که :

$$MH = AH - AM = l - AM$$

و $$MF=(AM+MF)-AM=l-AM$$

یعنی : $$MF=MH$$



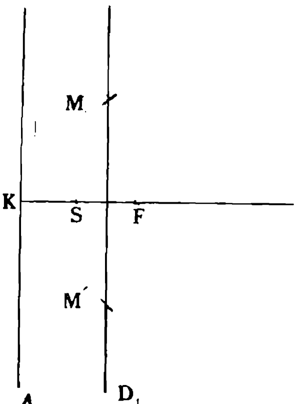
شکل ۴

II ـ رسم سهمی با نقطه‌یابی ـ

راه اول ـ از کانون F به‌یك نقطهٔ غیر مشخص H از خط هادی وصل می‌کنیم (شکل۴). از H عمودی بر هادی اخراج می‌کنیم تا عمود منصف FH را در M قطع کند. M روی سهمی است (چرا؟).

با تغییر H نقاط دیگری از سهمی بدست می‌آیند.

از قاعدهٔ رسم سهمی با نقطه‌یابی می‌توان بآسانی دریافت که هرچه H در روی Δ از K، محل تلاقی محور و هادی، دورتر شود نقطهٔ M هم دورتر می‌شود؛ و چون H می‌تواند در دوطرف K بینهایت دور شود، نقطهٔ M هم در دوطرف محور بینهایت دور می‌شود، پس منحنی سهمی تا بینهایت ادامه دارد.



شکل ۵

راه دوم ـ اگر خطی مانند D_1 به موازات Δ رسم کنیم (شکل ۵) و به مرکز F و با شعاعی مساوی فاصلهٔ دوخط Δ و D_1 قوسی بزنیم تا D_1 را در M و M´ قطع کند، M و M´ دو نقطه از سهمیند (چرا؟).

با تغییر D_1 نقاط دیگری از

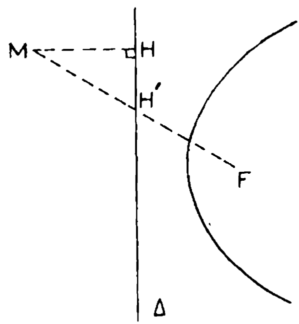
منحنی بدست می‌آیند . می‌بینیم که فاصلهٔ D_1 از Δ نباید از $\frac{FK}{۲}$ (نصف ممیز) کمتر باشد .

تبصره - ازاینجادرمی‌یابیم‌که اگر از S خطی موازی هادی‌رسم کنیم ، تمام نقاط سهمی نسبت به این‌خط در همان‌طرف واقعند که‌کانون F واقع است (غیراز S که روی خط است).

ب - داخل وخارج سهمی

۴- نواحی - سهمی صفحه را به دوبخش تقسیم‌می‌کند. یك‌بخش شامل F ،کانون منحنی است، وبخش دیگرشامل خط Δ ، هادی منحنی است . بخش اول را **ناحیهٔ داخل سهمی** و بخش دوم را **ناحیهٔ‌خارج سهمی** می‌نامند .

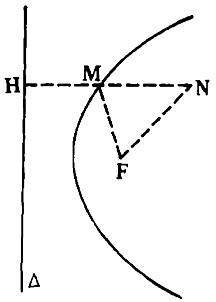
در حقیقت تمام سهمی در یك طرف خط هادی است که کانون در آن طرف است ؛ زیرا هیچ نقطه از خط هادی نمی‌تواند روی سهمی باشد (بچه دلیل ؟) . فاصلهٔ هر نقطه‌که در طرف دیگر Δ باشد ، ازکانون زیادتر است از فاصله‌اش از خط هادی . زیرا که اگر M یکی از نقاط باشد (شکل ۶) $MH < MH'$ ، پس بطور مسلم



شکل ۶

$MH<MF$. حالا ثابت می‌کنیم که **نقاط داخل سهمی، به کانون نزدیکترند تا به خط هادی ، و نقاط خارج سهمی ، به خط هادی نزدیکترند تا به کانون .**

اولا ـ هرگاه N نقطه‌ای در ناحیهٔ داخل سهمی باشد(شکل۷)واز آن عمودی برخط هادی فرود آوریم تا سهمی را در M وهادی‌رادر H قطع کند واز N و M به F وصل کنیم ، در مثلث FNM :



شکل ۷

$$NF<NM+MF$$

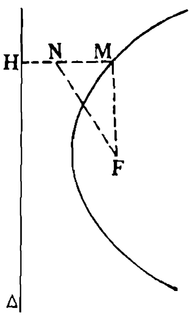
وچون به جای MF مساویش MH را دراین نامساوی قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$NF<NM+MH$$

یا : $NF<NH$

ثانیاً ـ هرگاه N نقطه‌ای از ناحیهٔ خارج سهمی واقع بین سهمی وهادی باشد (شکل۸) و از آن عمودی بر هادی فرود آوریم تا سهمی را در M و هادی را در H قطع کند و از N و M به F وصل کنیم ، در مثلث MNF :

$$NF>MF-MN$$



شکل ۸

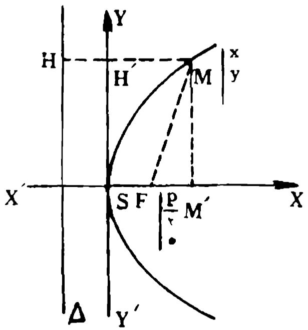
وچون به‌جای MF مساویش MH را در این نامساوی قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$NF>MH-MN$$

یا : $NF>NH$

ج - معادلهٔ سهمی

۵- محور xها را منطبق بر محور سهمی و جهت مثبت آن را از رأس به طرف کانون می‌گیریم وعمودی‌راکه از رأس سهمی برمحور رسم شود ، محور y ها اختیار می‌کنیم (شکل ۹) ؛ بدین طریق ، بنا به تبصرهٔ شمارهٔ ۳ همین‌فصل، xهای تمام نقاط سهمی مثبت خواهند شد وعلاوه براین ، x نقطهٔ F مساوی $\frac{p}{۲}$ و y آن صفر است . اگر



شکل ۹

مختصات نقطهٔ غیرمشخص M از سهمی را x و y بنامیم ، داریم :

$$MF^{۲}=y^{۲}+\left(x-\frac{p}{۲}\right)^{۲}$$

و

$$MH=x+\frac{p}{۲}$$

با استفاده ازاینکه $MF^{۲}=MH^{۲}$ ، حاصل می‌شود :

$$y^{۲}+x^{۲}+\frac{p^{۲}}{۴}-px=x^{۲}+px+\frac{p^{۲}}{۴}$$

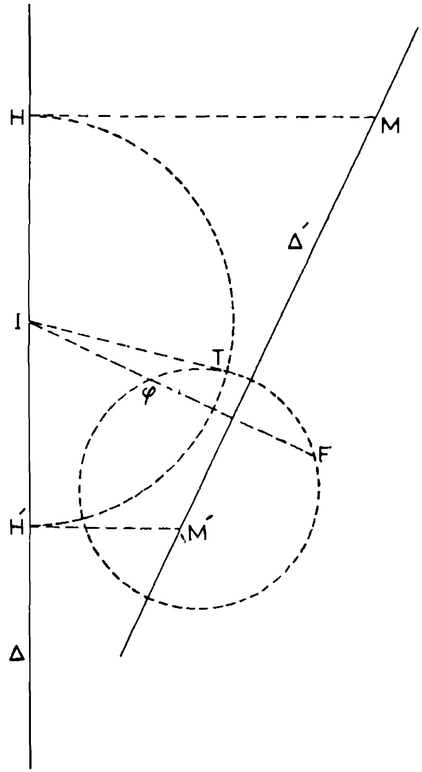
که پس ازساده‌کردن ، معادلهٔ سهمی چنین بدست می‌آید :

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

تبصره ـ اگر بعکس، محور yها را منطبق بر SF و محور xها را منطبق برخطی بگیریم که از S برمحور عمود می‌شود، معادلهٔ سهمی $x^2 = 2py$ خواهد شد.

د ـ قاطع و مماس و قائم

۶ـ تعیین فصل مشترك خط و سهمی ـ نقاط تقاطع خط ´Δ

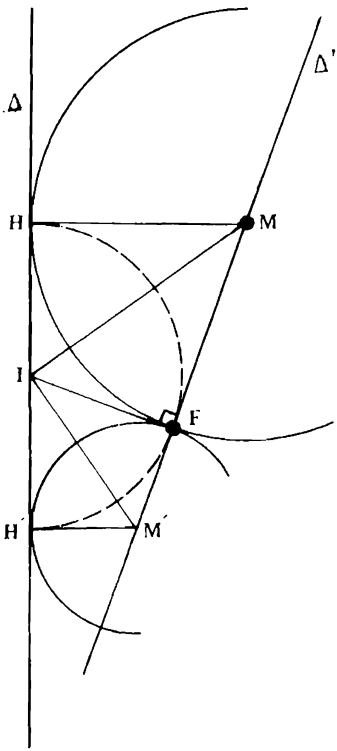


شکل ۱۰

با سهمیی به‌کانون F وهادی Δ ،مراکز دوایری‌هستند که بر F بگذرند و بر Δ مماس شوند (شکل ۱۰) . واضح است که این دوایر بر φ ، قرینهٔ F نسبت به ́Δ ، نیز می‌گذرند. پس تعیین نقاط تقاطع خط وسهمی راجع می‌شودبه رسم دوایری‌که بر F و φ بگذرند وبر Δ مماس باشند (شمارهٔ ۱۹ از فصل چهارم هندسه) . بر F و φ دایرهٔ دلخواهی می‌گذرانیم و از I ، محل تلاقی Fφ با Δ، مماس IT را بر آن دایره رسم می‌کنیم ؛ طول IT را دردوطرف I بر Δ نقل می‌کنیم‌تا نقاط H و ́H بدست‌آیند، از H و ́H دو عمود بر Δ رسم می‌کنیم تا ́Δ را در M و 'M قطع‌کنند؛ M و ́M نقاط‌مطلوبند.

بحث ـ فرض می‌کنیم ́Δ موازی محور سهمی نباشد؛ دراین صورت اگر φ ، قرینهٔ F نسبت‌به ́Δ در همان طرف Δ واقع شود که F قرار دارد، خط ́Δ سهمی‌را در دو نقطه قطع می‌کند.

هرقدر φ به‌Δ نزدیک‌شود، ITکوچکتر می‌شود و H و ́H به I نزدیک شده ودونقطهٔ تقاطع M و ́M نیز به یکدیگر نزدیکتر



شکل ۱۱

می‌شوند . وقتی که φ بر Δ واقع شود H و ´H با هم و M و ´M با هم یکی می‌شوند و ´Δ با سهمی مماس می‌شود .

اگر φ درطرف دیگر Δ قرارگیرد ، خط ´Δ با سهمی نقطهٔ مشترك ندارد .

اگر ´Δ با محور سهمی موازی باشد (یعنی $F\varphi$ با هادی موازی شود)، سهمی را فقط در یك نقطه قطع می‌کند .

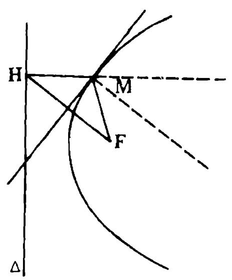
حالت خاص وقتی که ´Δ ازکانون سهمی بگذرد با توجه به شکل ۱۱ پیداکردن نقاط تلاقی آسان است .

نتیجهٔ ۱ ـ قرینهٔ کانون F نسبت به‌خط مماس برسهمی ، برروی خط هادی است . به عبارت دیگر ، **خط هادی سهمی ، مکان هندسی قرینه‌های کانون آن سهمی ، نسبت به خطوط مماس برآن است .**

نتیجهٔ ۲ ـ در عمل رسم سهمی با نقطه‌یابی (راه اول شکل ۴) ، عمود منصف FH ، مماس برسهمی درنقطهٔ M است .

نتیجهٔ ۳ ـ مماس در هر نقطه، زاویهٔ بین‌شعاع حامل آن نقطه‌وعمود مرسوم از آن نقطه بر خط هادی را نصف می‌کند (شکل ۱۲) (چرا ؟) .

نتیجهٔ ۴ ـ قائم بر سهمی در هر نقطه ، زاویهٔ بین شعاع حامل آن نقطه و امتداد عمود مرسوم از آن‌نقطه برخط هادی را نصف می‌کند. **(شکل ۱۲)** (چرا ؟) .



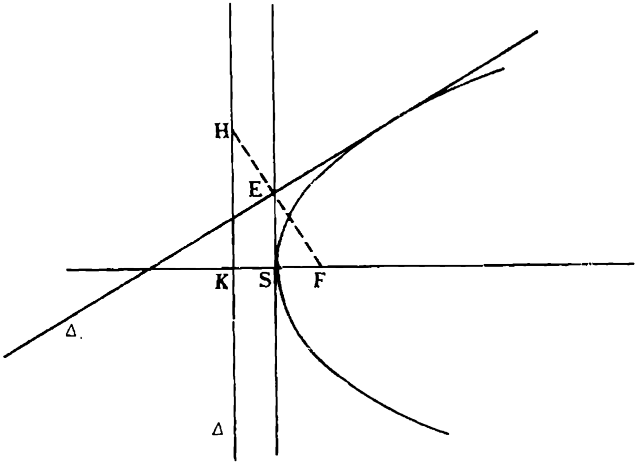
شکل ۱۲

نتیجهٔ ۵ ـ خطی‌که از S ، رأس سهمی، به موازات Δ ، خط هادی ، رسم شود مماس بر منحنی درنقطهٔ S است . (چرا ؟).

این خط را **مماس در رأس سهمی** می‌نامند .

۷- قضیه - مماس بر رأس سهمی مکان‌هندسی تصاویر کانون سهمی است بر خطوط مماس .

برهان - فرض‌کنیم که Δ_1 (شکل ۱۳) خطی مماس بر سهمی و H قرینهٔ کانون F نسبت به آن باشد ؛ وهمچنین نقطهٔ E تصویر کانون روی مماس Δ_1 و K تصویر F روی خط هادی باشد . اگر از E به S ،

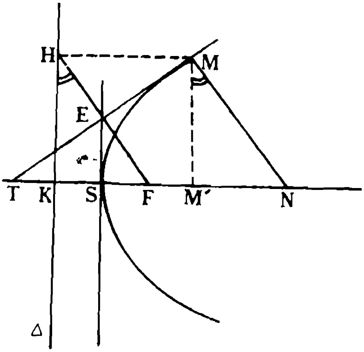


شکل ۱۳

رأس سهمی ، وصل کنیم در مثلث FHK ، خط ES که وسط دو ضلع را به‌هم وصل می‌کند ، موازی است با HK یعنی عمود است بر محور، پس مماس بر رأس سهمی است .

بر عکس اگر E یکی از نقاط خط مماس در رأس سهمی باشد و از E خط Δ_1 را بر FE عمودکنیم، بآسانی معلوم‌می‌شودکه H قرینهٔ F

نسبت به Δ_1 روی خط هادی واقع می‌شود پس Δ_1 بر سهمی مماس است.



شکل ۱۴

۸ـ تحت مماس و تحت قائم ـ هرگاه M نقطه‌ای از سهمی، ′M تصویر M بر محور (شکل ۱۴)، MT قطعه‌ای از مماس بر سهمی محدود به نقطهٔ تماس و محور، و MN قطعه‌ای از قائم بر منحنی محدود به نقطهٔ M و محور باشد، M′T را **تحت مماس** یا **تحت ظل** و M′N را **تحت‌قائم** سهمی می‌نامند.

پس :

تحت مماس تصویر قطعه‌ای از مماس برسهمی، محدود به نقطهٔ تماس ومحور است، برروی محور. وتحت قائم تصویر قطعه‌ای از قائم، محدود به‌سهمی ومحور است، برروی محور. جهت M′N همواره موافق جهت SF وجهت M′T مخالف آن است.

۹ ـ قضیه ـ راس سهمی همواره در وسط تحت مماس است.

برهان ـ E، تصویر کانون بر مماس MT (شکل ۱۴)، روی مماس بر رأس است. از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HEM و FET لازم می‌آید که نقطهٔ E وسط MT باشد؛ بنا بر این در مثلث MM′T خط ES که از وسط ضلع MT موازی ′MM رسم‌شده‌است ضلع ′TM را در نقطهٔ S نصف می‌کند.

۱۰ ـ قضیه ـ تحت قائم سهمی مساوی با پارامتر آن است.

برهان ـ در شکل ۱۴ ، $HF \parallel MN$ است (به چه دلیل ؟)

پس :
$$\widehat{KHF}=\widehat{M'MN}$$

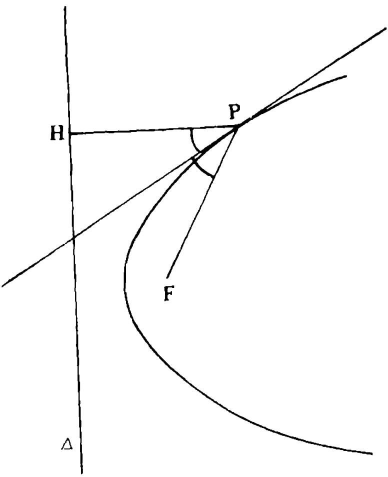
و دومثلث قائم‌الزاویهٔ HKF و $MM'N$ با یکدیگر برابرند (به چه دلیل ؟) .

بنابراین :
$$M'N=KF=p$$

هـ ـ مسائل مربوط به خط مماس بر سهمی

۱۱ ـ مسئله ـ رسم مماس برسهمی از نقطهٔ معین .

اولاً ـ اگر نقطهٔ P بر روی سهمی باشد (شکل ۱۵) ، شعاع حامل PF و عمود PH را بر خط هادی رسم می‌کنیم ؛ نیمساز زاویهٔ HPF ، یاخطی که از P به‌وسط HF (یا به نقطهٔ تلاقی HF و مماس دررأس) وصل شود ، مماس بر سهمی درنقطهٔ P است .

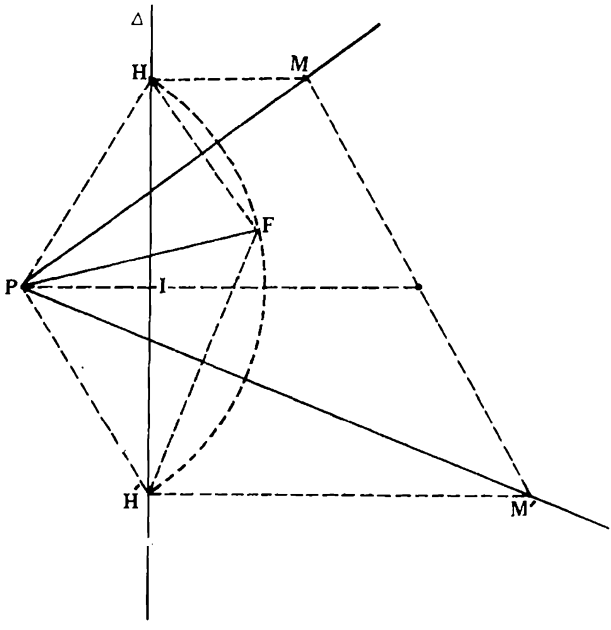


شکل ۱۵

ثانیاً ـ اگر نقطهٔ P خارج سهمی باشد(شکل۱۶)، به مرکز P دایره‌ای‌رسم‌می‌کنیم‌که‌برکانون F بگذرد و خط‌هادی‌را در H و H' قطع‌کند ؛ عمودمنصفهای FH و FH' مماسهای مطلوبند و نقاط تماس

واقعند بر عمودهایی که از H و H' بر خط هادی اخراج شوند .

اگر تصویر P برخط هادی را I بنامیم، برای آنکه بتوان مماس رسم‌کرد ، باید داشته باشیم: $PI<PH$ یا $PI<PF$ ، یعنی باید P خارج سهمی باشد .



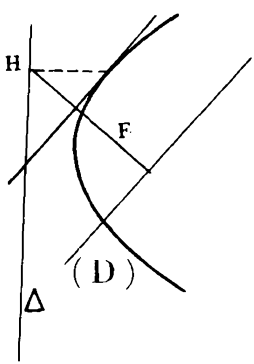
شکل ۱۶

نتیجه ـ خطی‌که ازنقطهٔ تقاطع دو مماس به‌موازات محور رسم‌شود بر وسط وتر واصل بین نقاط تماس می‌گذرد .

زیرا عمودی‌که‌از P بر HH' رسم شودبر I وسط HH' می‌گذرد (چرا؟) و در ذوزنقهٔ $MHH'M'$ خطی‌که از I وسط ساق HH' موازی قاعده‌ها رسم شده است ساق دیگررا هم نصف می‌کند .

۱۲ـ مسئله ـ رسم مماس برسهمی به‌موازات امتداد معین ـ هرگاه

بخواهیم بر سهمی مماسی به‌موازات امتداد (D) رسم کنیم (شکل۱۷) از F عمودی بر (D) فرود می‌ـ آوریم تا خط هادی‌را در H قطع کند. عمود منصف HF مماس مطلوب است.



شکل۱۷

همیشه می‌توان یك مماس به موازات امتداد معین بر سهمی رسم کرد جز وقتی که (D) با محور موازی باشد، که در این‌صورت مماس بر منحنی وجود ندارد.

۱۳ ـ قضایای پونسله ـ هرگاه از نقطه‌ای دو مماس بر سهمی رسم شود:

اولا ـ زاویهٔ بین یك مماس و خط واصل از آن نقطه به کانون، مساوی است با زاویهٔ بین مماس دیگر و خطی‌که از آن نقطه موازی با محور رسم شود.

ثانیاً ـ خطی که از نقطهٔ تقاطع دو مماس به کانون وصل شود، زاویهٔ بین شعاعهای حامل نقاط تماس را نصف می‌کند.

برهان ـ اولا اگر PM و 'PM مماسهای مفروض باشند (شکل ۱۸)، باید ثابت کنیم که:

$$\widehat{FPM}=\widehat{NPM'}$$

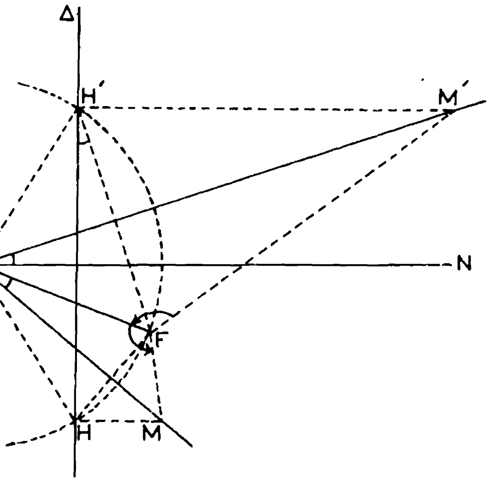
اندازهٔ زاویهٔ مرکزی FPM نصف $\widehat{FH}$ و اندازهٔ زاویهٔ محاطی FH'H نیز نصف همان‌کمان است؛ پس این دو زاویه برابرند، یعنی

داریم :
$$\widehat{FPM}=\widehat{FH'H}$$

اما دو زاویهٔ $FH'H$ و NPM' که اضلاعشان بر هم عمودند ،

متساویند ، یعنی داریم :

$$\widehat{NPM'}=\widehat{FH'H}$$



شکل ۱۸

از مقایسهٔ این دو تساوی نتیجه می‌گیریم که :

$$\widehat{FPM}=\widehat{NPM'}$$

ثانیاً ـ از F به M و M' وصل‌کرده ثابت می‌کنیم :

$$\widehat{MFP}=\widehat{M'FP}$$

برای این‌منظور، کافی‌است‌که توجه‌کنیم که $\widehat{MFP}$ قرینهٔ $\widehat{MHP}$

است نسبت به خط PM ، و $\widehat{M'FP}$ قرینهٔ $\widehat{M'H'P}$ است نسبت به

PM' ، پس باید ثابت کرد که :

$$\widehat{MHP}=\widehat{M'H'P}$$

اما تساوی اخیر محرز است ؛ زیرا که :

$$\widehat{MHP}=۹۰^\circ\pm\widehat{H'HP}$$

و
$$\widehat{M'H'P}=۹۰^\circ\pm\widehat{HH'P}$$

(علامت + وقتی است که P و سهمی در دو طرف خط هادی باشند و علامت − وقتی است که P و سهمی در یك طرف خط هادی واقع شوند .)

اما در مثلث متساوی‌الساقین HPH' ، داریم :

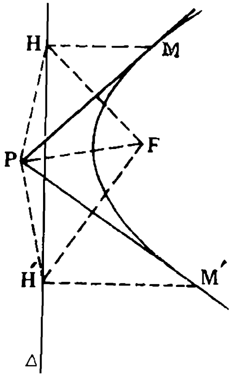
$$\widehat{HH'P}=\widehat{H'HP}$$

پس :
$$\widehat{MHP}=\widehat{M'H'P}$$

و از آنجا :
$$\widehat{MFP}=\widehat{M'FP}$$

در حالت مخصوص که P روی خط هادی باشد ، هر یك از دو زاویهٔ MHP و $M'H'P$ برابر ۹۰° است ؛ دراین صورت FM و FM' بر یك استقامت قرار می‌گیرند ، یا به عبارت دیگر ، خط MM' از F می‌گذرد .

۱۴ ـ قضیه ـ خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی است که از آنها می‌توان دو مماس عمود برهم بر سهمی رسم کرد .



شکل ۱۹

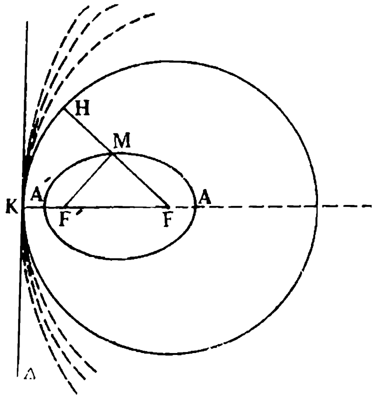
برهان ـ در حقیقت وقتی‌که از P دو مماس PM و PM' را بر سهمی رسم کنیم، زاویهٔ بین دو مماس نصف زاویهٔ HPH' است (به چه دلیل ؟) .

پس وقتی‌که دومماس برهم عمود باشند، باید زاویهٔ HPH' دو قائمه ، یعنی P روی خط HH' باشد (شکل ۱۹) .

۱۵ ـ قضیه ـ سهمی را می‌توان حد یك بیضی دانست‌که یك رأس محور اطول آن و کانون مجاورش ثابت بمانند و کانون دیگرش بینهایت دور شود .

برهان ـ هرگاه F و F' کانونها و A' یك رأس محور اطول (شکل ۲۰) و M یك نقطه از بیضی و H نقطهٔ تلاقی FM بادایرهٔ هادی کانون F و K قرینهٔ F' نسبت به A' باشند ، نقطهٔ K روی دایرهٔ هادی قرار دارد و MF'=MH . حالا F را بتدریج دورتر می‌بریم .

چون F' و A' ثابتند، نقطهٔ K نیز ثابت می‌ماندودایرهٔهادی‌همیشه ازنقطهٔ ثابت K می‌گذرد. اما باترقی شعاع دایره، قوس‌دایره درمجاورت نقطهٔ K بتدریج تحدبش‌کمترمی‌شود، ووقتی‌که F، مرکزدایره، بینهایت دورشود ، قوس دایره به طرف خطی مستقیم می‌گرایدکه از K بر F'A' عمود شود (خط Δ) . وقتی‌که F بینهایت دور شود ، خط FM هم که همیشه بردایره عمود است ، برحد دایره ، یعنی برخط Δ عمود می‌شود ؛



شکل ۲۰

و چون همیشه M از F′ و دایره به یك فاصله است ، وقتی که F بینهایت دور شود ، M از کانون F′ و خط Δ به یك فاصله خواهد بود ، یعنی بر یك سهمی قرار خواهد داشت که کانونش F′ ، کانون ثابت بیضی ، و خط هادیش حد دایرهٔ هادی کانون دیگر بیضی است .

تمرین

۱ ـ مطلوب است مکان هندسی مراکز دوایری که بر یك خط و یك دایرهٔ مفروض مماس باشند .

سهمی را با معلومات زیر رسم کنید :

۲ـ هادی و دو نقطه .

۳ـ کانون و دو نقطه .

۴ـ هادی و دو مماس .

۵ـ کانون و دو مماس .

۶ـ کانون و یك مماس و نقطهٔ تماس .

۷ـ هادی و یك مماس و نقطهٔ تماس .

۸ـ مماس بر رأس و دو مماس .

۹ـ مماس بر رأس و یك مماس دیگر با نقطهٔ تماس .

۱۰ـ کانون و یك مماس و یك نقطه .

۱۱ـ هادی و یك مماس و یك نقطه .

۱۲ـ دو مماس و نقاط تماس .

۱۳ـ مطلوب است مکان هندسی کانون سهمیهایی که بر دو نقطه بگذرند و هادیشان با امتداد مفروضی موازی باشد .

۱۴ـ مطلوب است مکان نقاطی که مجموع یا تفاضل فواصلشان از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت مقدار ثابتی باشد .

۱۵ ـ دایرهٔ ثابت O و وتر ثابت AB و وتر متحرك CD در آن مفروضند بقسمی که وسط وتر CD همیشه بر روی AB است . مطلوب است مکان هندسی M ، نقطهٔ تلاقی مماسهایی که از C و D بر دایره رسم شوند .

فصل پنجم

خواص مشترك بیضی، هذلولی و سهمی

الف ـ تعریف هر سه شکل به وسیلهٔ

مکان مرکز یك دایرهٔ متغیر

۱ـ چنانکه می‌دانیم :

بیضی مکان هندسی مراکز دوایری است که بریك دایرهٔ ثابت مماس باشند و همواره بر نقطهٔ ثابتی که داخل آن دایره است بگذرند . یا آنکه بیضی مکان هندسی نقاطی است که از یك دایره و یك نقطهٔ ثابت واقع در داخل آن به یك فاصله باشند .

(نتیجهٔ ۲ از شمارهٔ ۲۲ ، فصل دوم مخروطات)

هذلولی مکان هندسی مراکزدوایری است‌که بر یك دایرهٔ ثابت‌مماس باشند و همواره برنقطهٔ ثابتی‌که خارج آن دایره است بگذرند .

(شمارهٔ ۱۳ ، فصل سوم مخروطات)

سهمی مکان هندسی نقاطی است‌که از یك نقطهٔ ثابت ویك خط ثابت به یك فاصله باشند . یا مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که بر کانون بگذرند و برخط هادی مماس باشند .

(شمارهٔ ۱ ، فصل چهارم مخروطات)

چون می‌توان سهمی را حد بیضی و خط هادی سهمی را دایره‌ای

به شعاع بی‌اندازه بزرگ فرض‌کرد ، می‌توان هر یك ازسه منحنی بیضی و هذلولی و سهمی را یکسان چنین تعریف‌کرد :

سه منحنی بیضی ، هذلولی و سهمی ، مکان هندسی مراکز دوایری هستندکه بریك دایرهٔ ثابت مماس باشند و بر یك نقطهٔ ثابت بگذرند (به شرط اینکه همچنانکه گفته شد خط هادی سهمی را دایره‌ای به شعاع بی‌اندازه بزرگ فرض کنیم) . این نخستین **خاصیت مشترك** این سه منحنی است .

حال به ذکر خاصیتهای مشترك دیگر می‌پردازیم :

ب - تعریف هر سه منحنی به وسیلهٔ کانون و خط هادی

۲- یك بیضی به محور اطول $AA' = 2a$ و کانونهای F و F' $(FF' = 2c)$ و مرکز O (شکل ۱) در نظر می‌گیریم و برای آسانی بیان F و A را طرف راست مرکز قرارمی‌دهیم . برروی AA' نقطهٔ K رابه فاصلهٔ $OK = \frac{a^2}{c}$ طرف راست O اختیارمی‌کنیم (چون $\frac{a^2}{c} > a$ ، K طرف راست A می‌افتد) . از K خطی بر AA' عمود می‌کنیم و آن را **خط هادی** وابسته به کانون F می‌نامیم . هرگاه نظیر این ترسیم را طرف چپ O بجاآوریم ، خط هادی وابسته به‌کانون F' بدست می‌آید.

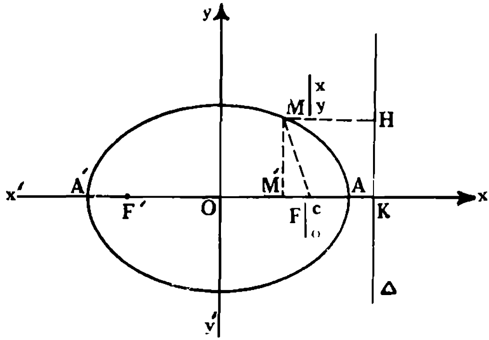
اکنون این قضیه را ثابت می‌کنیم :

۳- قضیه - **نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ بیضی از یك کانون به فاصلهٔ آن**

نقطه از خط هادی وابسته به آن‌کانون مساوی است با $e=\frac{c}{a}$ ، یعنی خروج از مرکز بیضی .

برهان - اگر H تصویر نقطهٔ M از بیضی روی خط هادی وابسته به‌کانون F باشد (شکل ۱) ، می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که $\frac{MF}{MH}$ ثابت و برابر e است .

محورهای مختصات متعامد xOy را بقسمی اختیار می‌کنیم که Ox منطبق بر OA (یعنی به‌طرف راست) باشد .



شکل ۱

مختصات نقطهٔ M از بیضی را (y و x) می‌گیریم و تصویر این نقطه را برمحور ´AA ، ´M می‌نامیم . حال نسبت $\frac{MF}{MH}$ را بدست می‌آوریم . اولاً می‌دانیم‌که : $MF=a-\frac{cx}{a}=\frac{a^2-cx}{a}$ (شمارهٔ ۱۳ ، فصل دوم مخروطات) .

ثانیاً چون جهت بردار MH مطابق‌جهت Ox است، اندازهٔجبری این بردار بر روی Ox ، یعنی $\frac{a^2}{c}-x$ ، مثبت و مساوی فاصلهٔ MH خواهد بود :

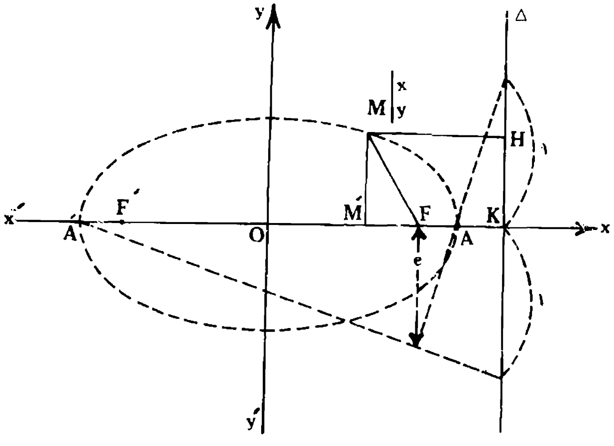
$$MH = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c}$$

بنابراین :
$$\frac{MF}{MH} = \frac{a^2 - cx}{a} : \frac{a^2 - cx}{c} = \frac{c}{a}$$

که بستگی به x یعنی به نقطهٔ اختیاری M ندارد .

۴ ـ قضیهٔ عکس ـ مکان هندسی نقاطی‌که نسبت فواصل هریك از آنها از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت ، مساوی مقدار ثابتی‌کوچکتر از یك باشد ، بیضیی است‌که آن نقطهٔ ثابت یکی ازکانونهای آن و آن خط ثابت ، خط هادی بیضی وابسته به آن کانون باشد .

برهان ـ هرگاه Δ خط ثابت و F نقطهٔ ثابت و e عدد ثابت



شکل ۲

کوچکتر از ۱ باشد (شکل ۲) ، از F عمود FK را بر Δ فرود می‌آوریم و بر روی آن نقاط A و A' را چنان تعیین می‌کنیم‌که FK را به نسبت e تقسیم‌کنند ، یعنی :

$$\frac{AF}{AK} = \frac{A'F}{A'K} = e$$

(A بین K و F ، و A' خارج قطعه خط FK روی امتدادآن است و چون $e<1$ ، دونقطهٔ A و A' به F نزدیکترندتا به K). آنگاه O وسط AA' و F' قرینهٔ F نسبت به O را بدست می‌آوریم. OAرا مساوی a و OF را مساوی c فرض می‌کنیم و محور xها را منطبق بر OA و عمود منصف AA' را محور yها اختیار کرده معادلهٔ مکان را نسبت به این دستگاه مختصات بدست می‌آوریم :

مختصات یك نقطهٔ M ازمکان را نسبت به این دستگاه مختصات، (y و x)می‌نامیم وبرحسب مختصات می‌نویسیم‌که $\frac{MF}{MH}$ برابرe یا $\frac{MF^2}{MH^2}$ برابر e^2 است (MH فاصلهٔ M از Δ است) :

$$MF^2=y^2+(x-c)^2$$

$$MH^2=M'K^2=(\overline{M'K})^2=(\overline{OK}-\overline{OM'})^2=(\overline{OK}-x)^2$$

اماازطرفی چون A و A' نسبت به FوKمزدوج‌توافقی یکدیگرند:

$$\overline{OF}\,.\,\overline{OK}=OA^2$$

یعنی :

$$\overline{OK}=\frac{OA^2}{OF}=\frac{a^2}{c}$$

پس

$$MH^2=(\frac{a^2}{c}-x)^2$$

و از طرف دیگر e برابر $\frac{c}{a}$ است زیرا :

$$e=\frac{A'F}{A'K}=\frac{AF}{AK}=\frac{A'F-AF}{A'K-AK}=\frac{FF'}{AA'}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

حال می‌نویسیم :
$$\frac{MF^2}{MH^2}=e^2$$

یعنی :
$$\frac{y^2+(x-c)^2}{\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2}=\frac{c^2}{a^2}$$

اینك اگر این تساوی را ساده‌کنیم و در ضمن a^2-c^2 را برابر b^2 بگیریم ، خواهیم داشت :
$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

یا :
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

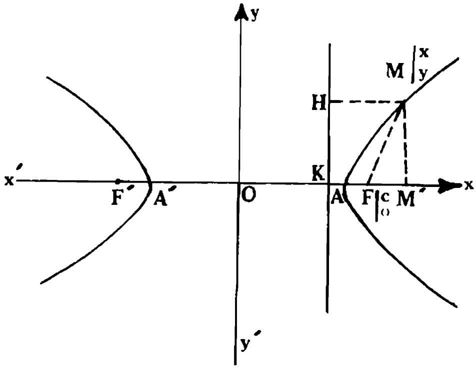
یعنی مکان M بیضیی است که محور کانونی آن $AA'=2a$ و کانونهای آن F و F' $(OF=c)$ می‌باشد .

۵- یك هذلولی به محور قاطع $AA'=2a$ و کانونهای F و $F'(FF'=2c)$ و مرکز O (شکل ۳) در نظر می‌گیریم و برای آسانی بیان F و A راطرف راست قرار می‌دهیم. برروی AA' نقطهٔ K رابه‌فاصلهٔ $OK=\frac{a^2}{c}$ طرف راست O اختیار می‌کنیم (چون $a>\frac{a^2}{c}$ ، K طرف چپ A قرار می‌گیرد) . از K خطی بر AA' عمود می‌کنیم و آن را **خط هادی** وابسته به کانون F می‌نامیم . هرگاه نظیر این ترسیم را در طرف چپ O بجا آوریم ، خط هادی وابسته به کانون F' بدست می‌آید . اکنون این قضیه را ثابت می‌کنیم :

۶- قضیه - نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ هذلولی ازیك‌کانون به فاصلهٔ آن

نقطه از خط هادی وابسته به آن کانون مساوی است با $e=\frac{c}{a}$ یعنی خروج از مرکز هذلولی .

برهان - برای اثبات، محورهای مختصات را برمحورهای هذلولی اختیارکرده (Ox را در امتداد وجهت OA شکل ۳) نقطهٔ $M(x$ و $y)$ از هذلولی را در H و M' بر هادی و محور $A'A$ تصویر می‌کنیم و $\frac{MF}{MH}$ را برحسب مختصات M حساب می‌کنیم :



شکل ۳

می‌دانیم که اگر M متعلق به شاخهٔ کانون F باشد ، $MF=\frac{cx}{a}-a$ (شمارهٔ ۹ ، فصل سوم مخروطات) و از طرف دیگر :

$$MH=M'K=\left|\overline{KM'}\right|=\left|x-\frac{a^2}{c}\right|$$

پس :

$$\frac{MF}{MH}=\frac{\frac{cx}{a}-a}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}$$

و اگر M متعلق به شاخهٔ کانون F' ، یعنی اگر x منفی باشد :

$$MF = a - \frac{cx}{a} = \frac{a^2 - cx}{a}$$

و از طرف دیگر:

$$MH = \overline{M'K} = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c}$$

بنابراین :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{\frac{a^2 - cx}{a}}{\frac{a^2 - cx}{c}} = \frac{c}{a}$$

۷- قضیهٔ عکس - مکان هندسی نقاطی‌که نسبت فواصل هریك از آنها از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت ، مساوی مقدار ثابتی بزرگتر ازیك باشد ، هذلولی است .

برهان - هرگاه Δ (شکل ۴) خط ثابت و F نقطهٔ ثابت و $e>1$ عدد ثابت باشد ، از F عمود FK را بر Δ فرود آورده برروی آن نقاط A و A' را چنان تعیین می‌کنیم که FK را به نسبت e تقسیم کنند ، یعنی : $\frac{AF}{AK} = \frac{A'F}{A'K} = e$ (A بین F و K و A' خارج پاره‌خط FK وروی امتداد آن قرار دارد و چون $e>1$ ، A و A' به K نزدیکترند تا به F) ، آنگاه O وسط $A'A$ و F' قرینهٔ F را نسبت به O بدست می‌آوریم و OA را مساوی a و OF را مساوی c فرض می‌کنیم و $\sqrt{c^2-a^2}$ را b می‌نامیم و $A'A$ را محور xها منطبق به OA وعمود-منصف AA' را محور yها اختیار می‌کنیم . مختصات یك نقطهٔ M از مکان را نسبت به‌این‌دستگاه مختصات، x و y می‌نامیم وبرحسب مختصات می‌نویسیم که $\frac{MF^2}{MH^2}$ برابر e^2 است (MH فاصلهٔ M از Δ است) .

یعنی مکان یك هذلولی است .

۸- از قضایای ۳ و ۴ همین فصل نتیجه می‌گیریم‌که :

بیضی مکان هندسی نقاطی است‌که نسبت فواصل هریك ازآنها از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت ، مساوی عدد ثابتی‌کوچکتر از ۱ است .

از قضایای ۶ و ۷ همین فصل نتیجه می‌گیریم‌که :

هذلولی مکان هندسی نقاطی است‌که نسبت فواصل هریك ازآنها از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت ، مساوی عدد ثابتی بزرگتر از ۱ است .

و تعریف سهمی این بودکه :

سهمی مکان هندسی نقاطی است‌که نسبت فواصل هریك از آنها از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت مساوی عدد ۱ باشد (شمارهٔ ۱ ، فصل چهارم مخروطات) .

می‌بینیدکه هرسه منحنی یك تعریف دارند جزآنکه مقدار ثابت آنها متفاوت است .

پس برای بیضی و هذلولی و سهمی می‌توان تعریف مشترکی کرد که **دومین خاصیت مشترك** آن سه منحنی است .

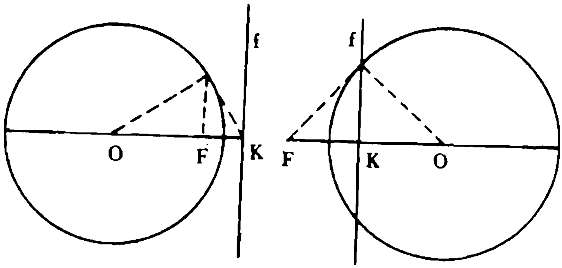
هر مقطع مخروطی (بیضی ، هذلولی و سهمی) مکان هندسی نقاطی است‌که نسبت فواصل هریك از آنها از یك نقطهٔ ثابت ویك خط ثابت عدد ثابتی باشد .

نقطهٔ ثابت را **کانون** و خط ثابت را **هادی** وابسته به آن کانون و عدد ثابت را **خروج ازمرکز** مقطع مخروطی می‌گویند .

اگر خروج از مرکز کوچکتر از ۱ باشد ، مکان بیضی است . هرگاه خروج ازمرکز بزرگتراز ۱ باشد، مکان هذلولی است ودرصورتی که خروج از مرکز مساوی ۱ باشد ، مکان سهمی است .

در مقابل هرکانون مقطع مخروطی یك خط هادی وجود دارد . پس بیضی و هذلولی دو خط هادی دارندکه منتسب به دوکانونند (هادی کانون F وهادیکانون ´F) . اما سهمی ، بطوریکه میدانید یككانون دارد .

۹ ـ قضیه ـ خط هادی هرکانون بیضی یا هذلولی ، قطبیآنکانون است نسبت به دایرۀ اصلی .

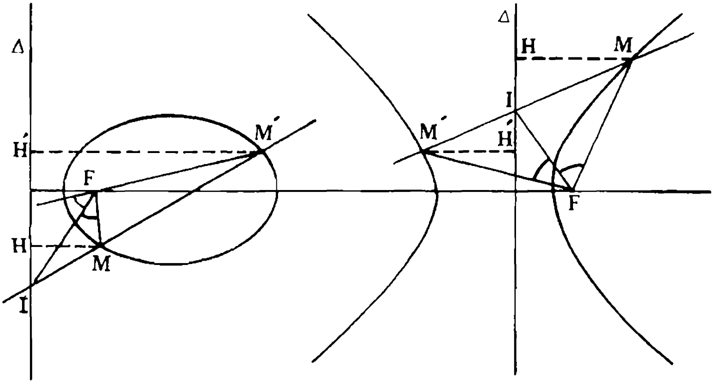


شکل ۵

برهان ـ اگر K پای قطبی نقطۀ F نسبت به دایرۀ اصلی باشد (شکل ۵) ، $\overline{OF}\cdot\overline{OK}=a^2$ ، پس $\overline{OK}=\dfrac{a^2}{c}$ ؛ یعنی قطبی نقطۀ F بر هادی آن کانون منطبق است .

۱۰ـ خاصیت مشترك دیگر ـ قضیه ـ هرگاه خطی یك مقطع مخروطی را در M و ´M ویك خط هادی را در I قطعکند ، خطیکه از I بهکانونF مربوط به آن خط هادی وصل شود ، نیمسازیکی از زوایایبین شعاعهای حامل نقاط M و ´M است .

برهان ـ هرگاه M و M' دو نقطه از منحنی و H و H' تصاویر آنها روی خط هادی باشند (شکل ۶) :



شکل ۶

$$\frac{MF}{MH}=\frac{M'F}{M'H'}=e$$

یا :

$$\frac{FM}{FM'}=\frac{MH}{M'H'} \qquad (۱)$$

در دو مثلث متشابه IMH و $IM'H'$:

$$\frac{IM}{IM'}=\frac{MH}{M'H'} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ تساویهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که :

$$\frac{IM}{IM'}=\frac{FM}{FM'}$$

بنابراین در مثلث FMM' خط FI ضلع مقابل به رأس F را بر نسبت دوضلع دیگر تقسیم‌کرده است : پس نیمساززاویهٔ داخلی یاخارجی این مثلث است .

چنانچه مقطع مخروطی بیضی یا سهمی باشد ، یا M و M' متعلق به یك شاخهٔ هذلولی باشند ، M و M' در یك طرف هادی خواهند بود

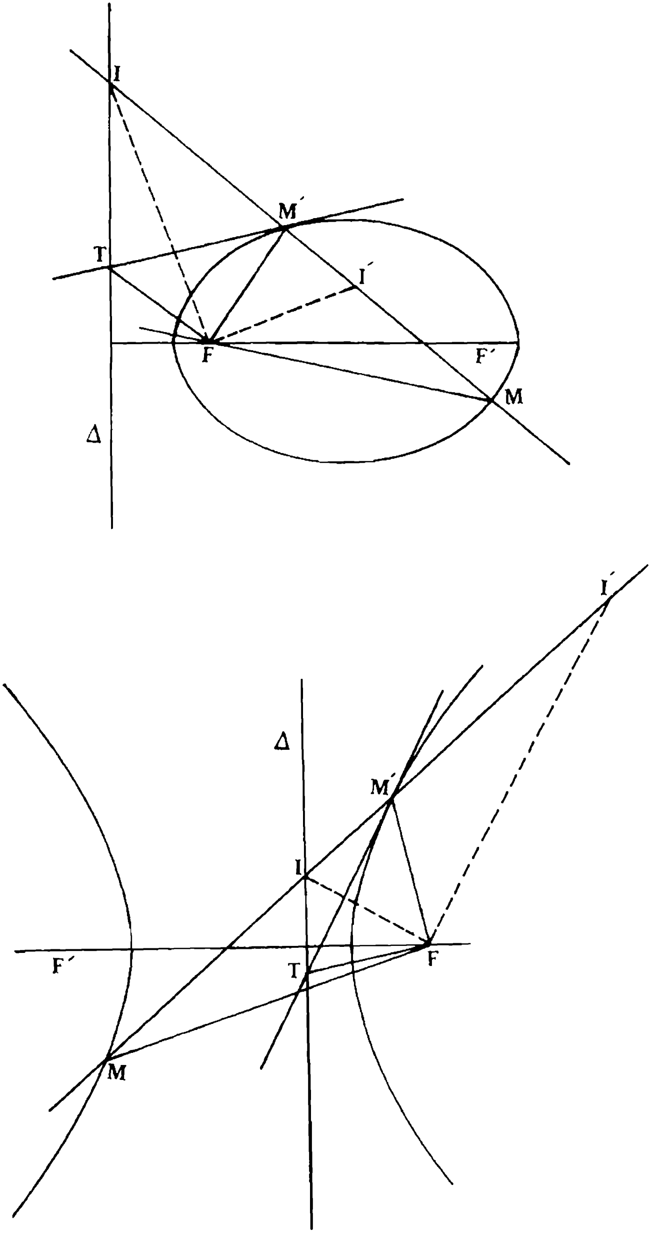
و FI نیمساز خارجی است ؛ و اگر M و ´M متعلق به دو شاخهٔ یك هذلولی باشند ، FI نیمساز داخلی است .

۱۱- خاصیت مشترك دیگر - قضیه - قطعه‌ای از مماس بر یك مقطع مخروطی ، محدود بین نقطهٔ تماس وخط هادی هر کانون، ازآن‌کانون به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود .

برهان - هرگاه ´MM قاطعی‌ازمقطع مخروطی وI نقطهٔ برخورد آن با خط هادی باشد (شکل ۷) ، IF یکی از دونیمساز زوایای بین MF و M´F است و بر ´FI ، نیمساز دیگر ، عمود است .

حال اگر قاطع ´MM درحول ´M شروع به‌دوران‌کندوM بتدریج به ´M نزدیك شود، نیمسازی‌که همواره بین ´FM و FMاست‌نیز بتدریج به ´FM نزدیك خواهد شد ؛ سرانجام ، وقتی‌که M بر´M واقع شود ، این نیمساز هم بر ´FM منطبق شده و قاطع ´MM به مماس M´T (T روی خط هادی) وخط FI به خط FT تبدیل می‌شود. وچون‌دونیمساز همواره برهم عمودند ، حد یکی از دو نیمساز ، یعنی FT ، بر حد نیمساز دیگر ، یعنی ´FM عمود است و زاویهٔ M´FT قائمه است . یعنی پاره‌خط M´T ازکانون F به زاویهٔ قائمه دیده‌می‌شود .

نتیجه - از نقطهٔ T که روی خط هادی است ، می‌توان مماس دیگری هم بر مقطع مخروطی رسم‌کردکه اگر نقطهٔ تماس آن با مقطع مخروطی را M_1 بنامیم ، FM_1 نیز بر FT عمود است . **پس اگراز یك‌نقطهٔ T واقع برخط هادی وابسته به یك‌کانون F ، دو مماس بر مقطع مخروطی رسم‌کنیم ، خط واصل بین نقاط تماس برآن‌کانون می‌گذرد و بر FT عمود است** (چرا ؟) .



شکل ۷

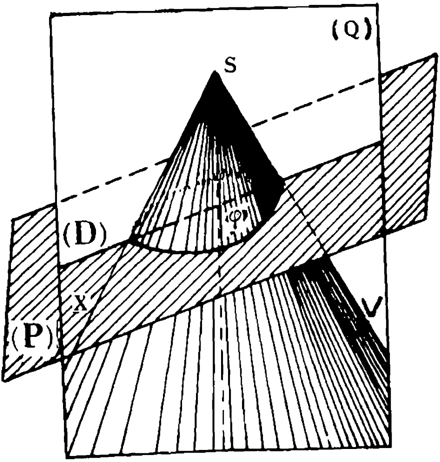
ج - تعریف سه منحنی به صورت مقطع مخروط دوار

۱۲ - قضایای داندلن : هرگاه صفحه‌ای همهٔ مولدهای سطح مخروطی دواری را دریك طرف رأس قطع کند ، مقطع آن با سطح مخروطی بیضی است .

هرگاه صفحه‌ای سطح مخروطی دواری‌را قطع‌کندو بایکی‌ازمولدهای آن موازی باشد ، مقطعش در آن سطح مخروطی سهمی است .

هرگاه صفحه‌ای عده‌ای ازمولدهای سطح مخروطی دواری رادر یك طرف رأس وعده‌ای دیگر ازمولدها را در طرف دیگر رأس‌قطع‌کند ، مقطع آن در سطح مخروطی هذلولی است .

برهان - نخست صفحهٔ Q را چنان بر محور شکل دوار مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ قاطع P عمود باشد و آن را صفحهٔ شکل می‌نامیم (شکل ۸) . سپس ، برای آسان‌کردن اثبات این قضیهٔ بسیار مهم ، سطح مخروطی و صفحهٔ قاطع را بر صفحهٔ شکل تصویر می‌کنیم . تصویر صفحهٔ P بر صفحهٔ شکل و مقطع آن با صفحهٔ مذکور خطی مانند D و تصویر سطح مخروطی دوار بر صفحهٔ شکل و فصل مشترکش باآن صفحه زاویهٔ xSy خواهد بود . هرگاه صفحهٔ P تمام مولدها را در یك طرف S قطع کند ، D دو ضلع زاویهٔ xSy را در یك طرف رأس S قطع می‌کند (شکل ۹) ؛ هرگاه صفحهٔ P با یکی از مولدها موازی باشد ، D با یکی از دو ضلع زاویه موازی است (شکل ۱۱) ؛ در صورتی که صفحهٔ P ، سطح مخروطی را در دو طرف رأس قطع کند ، D هر یك از دو ضلع زاویه را در یك طرف S قطع می‌کند (شکل ۱۲) . زاویهٔ

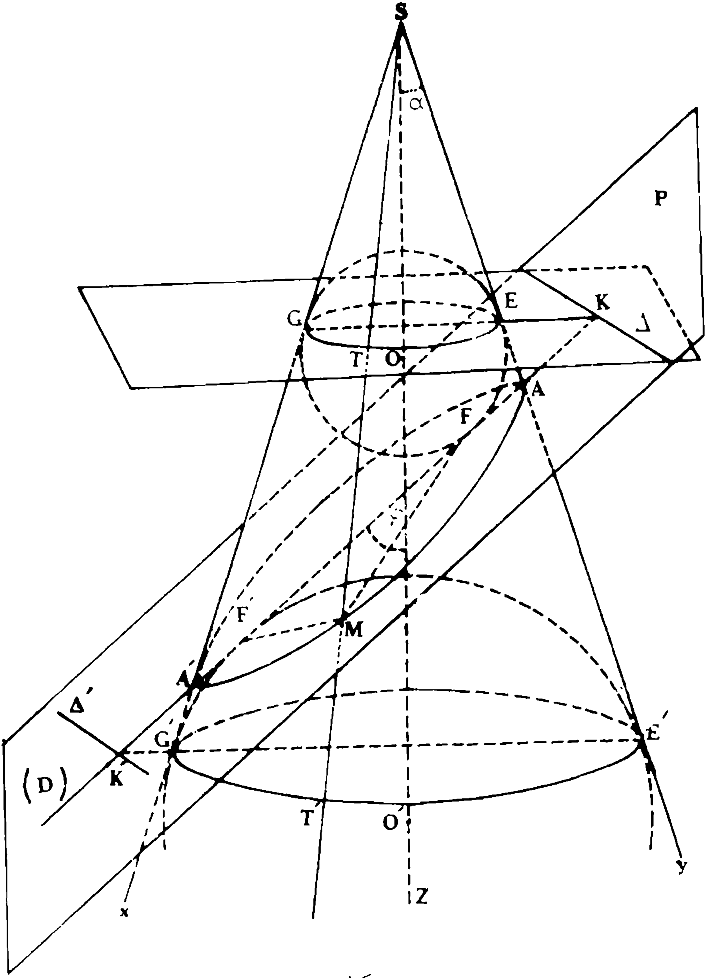


شکل ۸

φ بین D و محور مخروط ، زاویهٔ محور با صفحهٔ قاطع است. با توجه به شکلهای ۹ و ۱۱ و ۱۲ ، می‌بینید که اگر صفحهٔ قاطع در یك طرف S باشد ، $\alpha < \varphi$ ،(α نیم‌زاویهٔ رأس سطح مخروطی دوار فرض شده است) و اگر صفحهٔ قاطع با یك مولد موازی باشد، $\varphi = \alpha$، و اگر صفحهٔ قاطع مولدها را در دو طرف رأس قطع کند ، $\varphi < \alpha$.

اکنون می‌پردازیم به اثبات قضیه در هر یك از موارد فوق :

اول ـ P تمام مولدهای سطح مخروطی را در یك طرف رأس قطع کرده است ــ حالتی که $\varphi = 90°$ ، یعنی صفحهٔ P بر محور عمود و مقطع دایره باشد ، محتاج به مطالعه نیست . پس فرض می‌کنیم که $\alpha < \varphi < 90°$. خط D اضلاع Sy و Sx زاویه را در A و A′ قطع می‌کند (شکل ۹). دوایر محاطی داخلی و محاطی خارجی مثلث SAA′ واقع در داخل زاویهٔ S را رسم می‌کنیم تا بترتیب اولی، (دایرهٔ O)، در E و F و G و دومی ، (دایرهٔ O′) ، در E′ و F′ و G′ بر اضلاع مماس شوند. اکنون ثابت می‌کنیم که مقطع ، یك بیضی است که A و A′ رئوس محور اطول و F و F′ دو کانون آنند . زاویهٔ xSy و دایره‌های O و O′ را در حول محور Sz یك دور دوران می‌دهیم؛ از دوران دایره‌های محاطی داخلی و خارجی، دو کره بوجود می‌آیند که بترتیب در F و F′ بر صفحهٔ قاطع و



شکل ۹

درطول دو دایره به قطرهای EG و E′G′ برمخروط مماسند ، حال اگر M یك نقطهٔ دلخواه از منحنی مقطع باشد ، باید ثابت کنیم که :

$$MF+MF'=AA'$$

(یادآوری می‌کنیم که قطعه‌ای از هر ضلع مثلث ، محدود بین یك رأس و نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی ، مساوی است با نصف محیط

مثلث منهای ضلع مقابل به آن رأس وقطعه‌ای از هر ضلع مثلث ، محدود بین یك رأس و نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی ، مساوی است با نصف محیط مثلث منهای ضلعی که بر آن رأس می‌گذرد و دایره بر امتدادش مماس است .)

حالا می‌گوییم که :

$$FA = AE = p - SA'$$

(p نصف محیط مثلث SAA' است)

و
$$F'A' = A'G' = p - SA'$$

پس :
$$FA = F'A'$$

و
$$AF' = AE'$$

بنابراین از یك طرف :

$$AF + AF' = A'F' + AF' = AA'$$

و از طرف دیگر :

$$AF + AF' = AE + AE' = EE'$$

پس :
$$EE' = AA'$$

چون M در صفحهٔ قاطع است ، MF مماس است بر کرهٔ O و MF' مماس است بر کرهٔ O' ؛ و چون M روی مخروط می‌باشد ، مولد SM بر کره‌های O و O' مماس است (T و T' ، نقاط تماس ، روی دایره‌های تماس واقعند) .

پس :
$$MF = MT$$

و
$$MF' = MT'$$

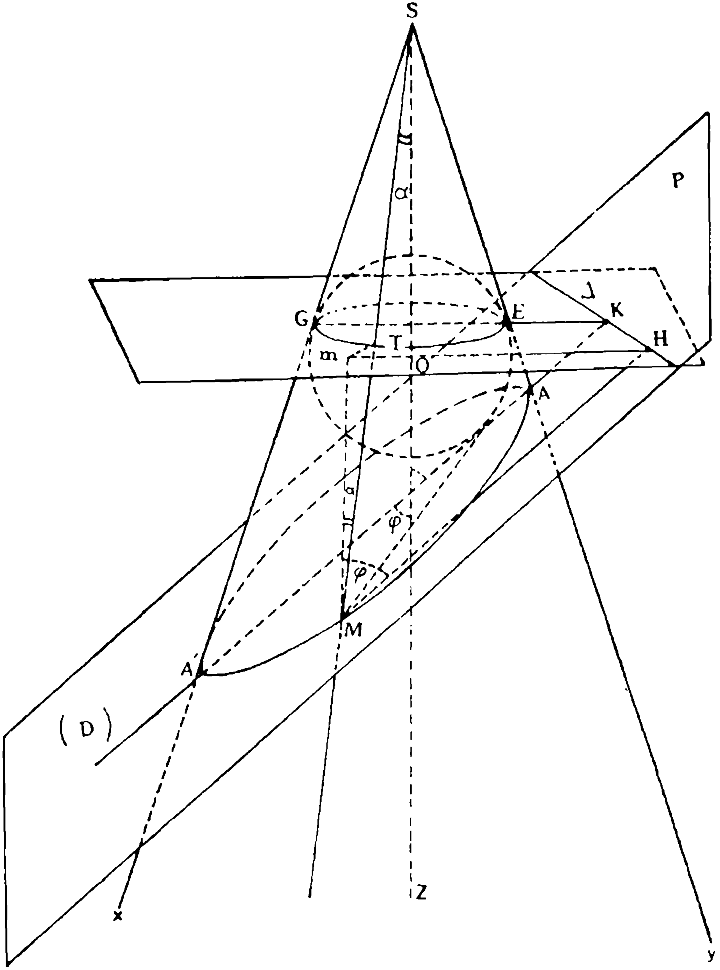
یعنی :
$$MF + MF' = MT + MT' = TT'$$

وچون تمام مولدهای مخروط ناقص ، واقع بین دو دایرهٔ تماس ،

با هم برابرند ، $TT' = EE' = AA'$ ؛ یعنی :

$$MF + MF' = AA'$$

خطهای هادی بیضی ـ خط Δ ، فصل مشترک صفحهٔ قاطع و



شکل ۱۰

صفحهٔ دایرهٔ تماس مخروط باکرهٔ O (شکل ۱۰) ، بر نقطهٔ K ، محل

تلاقی D با GE ، می‌گذرد[1] و بر صفحهٔ شکل عمود بوده و در نتیجه بر ´AA عمود است ؛ اکنون ثابت می‌کنیم‌که Δ خط هادی بیضی‌وابسته به‌کانون F می‌باشد؛ برای این کار، کافی است ثابت‌کنیم‌که نسبت فواصل هر نقطهٔ M که بر منحنی مقطع اختیار شود ، از کانون F و خط Δ مقداری است ثابت وکوچکتر از ۱ .

عمود MH را بر Δ و عمود Mm را بر صفحهٔ دایرهٔ تماس فرود می‌آوریم و Mm را به l می‌نماییم . در مثلث قائم‌الزاویهٔ MmH :

$$\mathrm{MH}=\frac{l}{\cos\varphi}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ MmT :

$$\mathrm{MT}=\frac{l}{\cos \mathrm{m}\widehat{\mathrm{MT}}}=\frac{l}{\cos\alpha}$$

اما MT = MF ، پس :

$$\mathrm{MF}=\frac{l}{\cos\alpha}$$

بنابراین :
$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}}=\frac{\frac{l}{\cos\alpha}}{\frac{l}{\cos\varphi}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}$$

۱ـ هرگاه دوفصل مشترك از فصل مشترکهای سه صفحهٔ دوبدو متقاطع در نقطه‌ای تلاقی‌کنند ، فصل مشترك سوم نیز بر آن نقطه خواهدگذشت .

وچون $\varphi>\alpha$، $\cos\varphi<\cos\alpha$ و $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}<1$. پس $\frac{MF}{MH}$، مساوی

عدد ثابت $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}$ است که کوچکتر است از واحد.

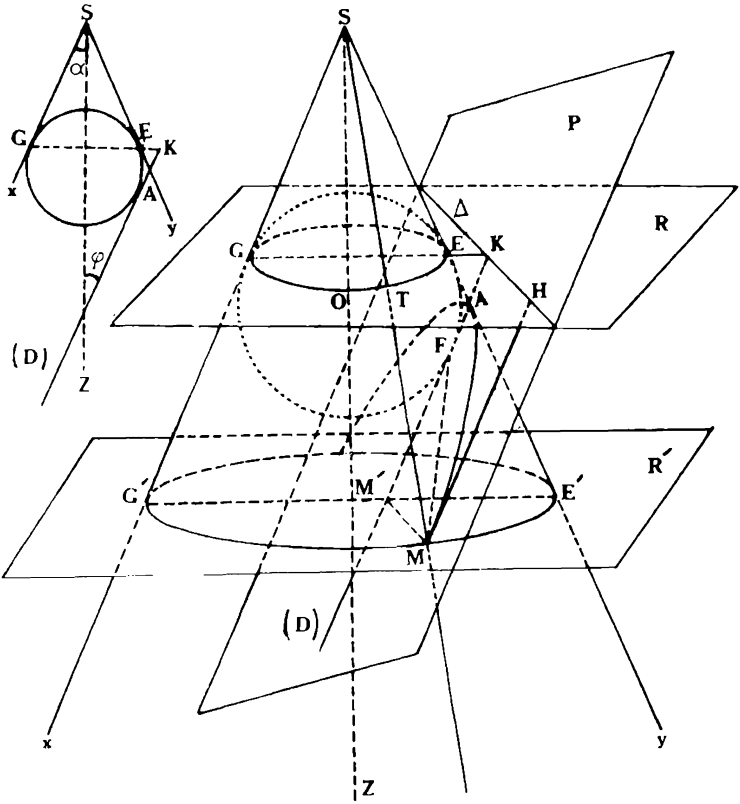
خط Δ' فصل مشترك صفحهٔ قاطع با صفحهٔ دایرهٔ تماس مخروط با کرهٔ دیگر، خط هادی کانون F' است (شکل ۹).

دوم ـ صفحهٔ قاطع با یك مولد موازی است (شکل ۱۱) ـ خط D موازی است با Sx و Sy را در A قطع می‌کند. دایره‌ای می‌کشیم که بر Sx و Sy و D در G و E و F مماس شود.

اگر D را ثابت نگاه داریم و شکل را درحول محور Sz دوران دهیم، از دوران دایره‌کره‌ای بوجود می‌آید که بر صفحهٔ قاطع در F، و بر مخروط در طول دایره‌ای به قطر EG مماس است. صفحهٔ دایرهٔ تماس‌که‌آن را R می‌نامیم، صفحهٔ قاطع رادرفصل مشترکی مانند Δ قطع می‌کندکه برنقطهٔK، محل تلاقی D با GE، می‌گذرد وبرصفحهٔ شکل عمود است.

حالا فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای از مقطع باشد و ثابت می‌کنیم که مکان M یك سهمی است‌که‌کانونش F وهادیش Δ است. مولد SM را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ تماس را در T قطع‌کند. چون MF و MT دومماسندکه یکی درصفحهٔ قاطع و دیگری روی مخروط، از M برکرهٔ O رسم شده‌اند، داریم:

$$MF=MT \qquad (۱)$$



شکل ۱۱

عمود MH را بر Δ فرود می‌آوریم ؛ باید ثابت کنیم‌که $MF = MH$.

بر M صفحهٔ R' را عمود بر محور مخروط مرور می‌دهیم ؛ این صفحه مخروط را درطول دایره‌ای به قطر $E'G'$ و صفحهٔ قاطع را بر فصل مشترکی عمود بر صفحهٔ شکل ، یعنی موازی Δ ، قطع می‌کند و این فصل مشترك بر نقطهٔ M وهمچنین بر نقطهٔ M' ، محل تلاقی D با $G'E'$، می‌گذرد و شکل $MM'KH$ مستطیل است و $MH = M'K$. شکل

$M'KGG'$ متوازی‌الاضلاع است و $M'K = GG'$ ؛ اما $G'G = MT$ (زیراکه مولده‌ای مخروط بین دو دایرهٔ متوازی ، متساویند.) ، پس :

$$M'K = MT$$

یعنی : $$MH = MT$$

وبا توجه به رابطهٔ (۱) $$MH = MF$$

راه دیگر ـ اگر فاصلهٔ **M** از صفحهٔ دایرهٔ تماس را **l** فرض‌کنیم، مطابق آنچه دربارهٔ خط هادی بیضی گفتیم :

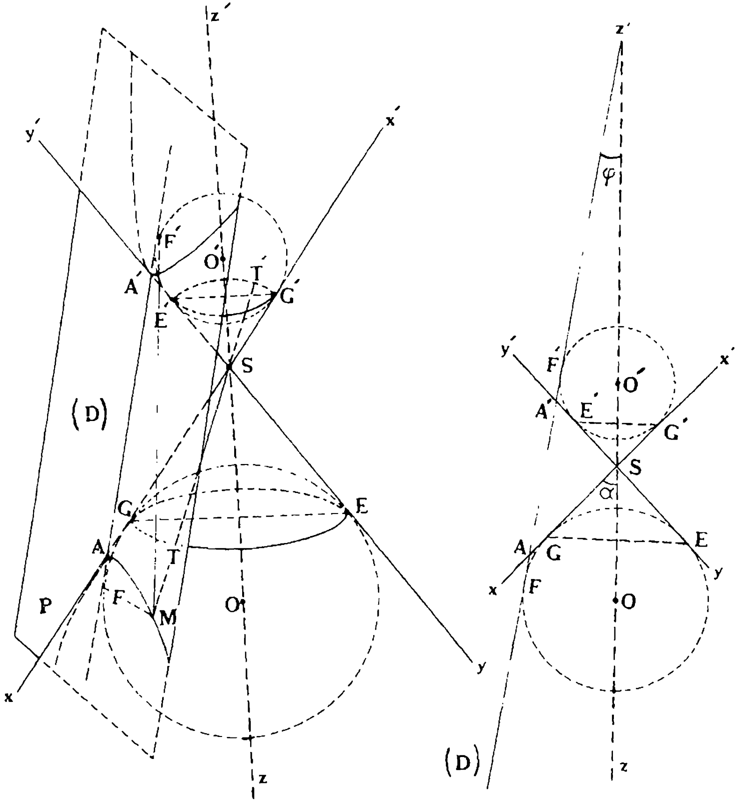
$$MF = MT = \frac{l}{\cos\alpha}$$

$$MH = \frac{l}{\cos\varphi}$$

پس : $$\frac{MF}{MH} = \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}$$

اما در اینجا $\alpha = \varphi$ و $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} = ۱$ ،پس $\frac{MF}{MH} = ۱$ ، یعنی مکان **M** سهمی است .

سوم ـ صفحهٔ P ، مولدهای مخروط را در دو طرف راس S قطع می‌کند (شکل ۱۲) . **D** ضلع **Sx** را در **A** و امتداد **Sy** را در ´**A** قطع‌می‌کند. دو دایره رسم می‌کنیم‌که بر **D** ، در نقاط **F** و ´**F** ، و براضلاع زاویه، در **E** و **G** و در ´**E** و ´**G** مماس شوند . از دوران این دودایره درحول محور **Sz** دو کره بوجود می‌آیند که در **F** و ´**F** بر صفحهٔ قاطع و در طول دودایره به‌قطرهای **EG** و ´**E´G** برمخروط‌مماسند؛درمثلث ´**ASA**:



شکل ۱۲

$$AF = AG = A'F' = A'E'$$

اگر M یکی از نقاط مقطع و T ؛ T' نقاط تلاقی مولد SM با دو دایرهٔ تماس باشند ، $MF = MT$ ، زیراکه هر دو، مماسی هستندکه از M بر کرهٔ O رسم شده‌اند ؛ و $MF' = MT'$ ، به دلیل آنکه هر دو مماسی هستندکه از M برکرهٔ O' رسم شده‌اند .

پس :

$$MF' - MF = MT' - MT = TT' = GG'$$
$$= AG' - AG = AF' - AF$$
$$= AF' - A'F' = AA'$$

بنابراین مکان M یك هذلولی است به‌کانونهای F و F´ ورئوس A و A´ .

خطهای هادی هذلولی - به دلیلی شبیه به آنچه در بارهٔ بیضی گفتیم ، Δ فصل مشترك صفحهٔ قاطع با صفحهٔ دایرهٔ تماس کرهٔ O ، خط هادی کانون F است . در حقیقت اگر M نقطه‌ای از مقطع ، MM´ عمود وارد از M برصفحهٔ دایرهٔ تماس و MH عمود وارد از M بر Δ باشند:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MM´H :

$$\mathrm{MH}=\frac{1}{\cos\varphi}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ MM´T :

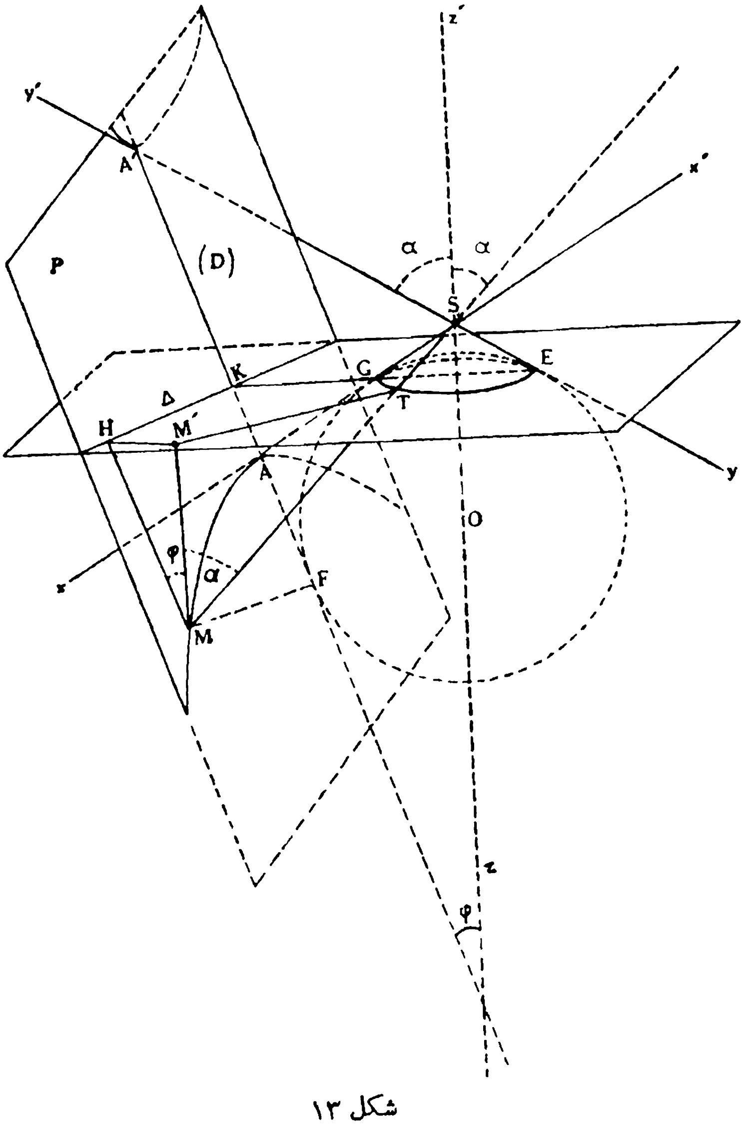
$$\mathrm{MT}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

و چون MT=MF ،

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\varphi}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}$$

در اینجا $\varphi<\alpha$ ، یعنی $\cos\varphi>\cos\alpha$ ونسبت $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}}$ مساوی است با عدد ثابت بزرگتر از واحد $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}$.

فصل مشترك صفحهٔ قاطع با صفحهٔ دایرهٔ تماس مخروط با کرهٔ O´ خط هادی کانون F´ است .



شکل ۱۳

۱۳ ـ قضیه ـ فصل مشترك هر صفحه با یك سطح استوانی دوار، دایره یا بیضی یا دو خط مستقیم است.

برهان ـ درحقیقت سطح استوانی را می‌توان یك سطح مخروطی

فرض کرد که رأس آن در بینهایت دور قرار گرفته باشد و در نتیجه مولدهایش با یکدیگر موازیند . به این ترتیب ، مسئلهٔ تعیین مقطع صفحه با سطح استوانی دوار، منجر می‌شود به تعیین مقطع صفحه با سطح مخروطی ، با این تفاوت که در این حالت قطع شدن مولدها در دو طرف رأس مورد پیدا نمی‌کند ، یعنی حالتی که مقطع هذلولی است از میان می‌رود . پس :

اگر صفحهٔ قاطع بر محور عمود باشد ، مقطع آن با سطح استوانی دایره است .

و اگر صفحه ، نه برمحور عمود و نه باآن موازی باشد ، مقطع آن در سطح استوانی بیضی است .

و بالاخره **اگر صفحه‌ای به موازات مولدها (یامحور)، سطح استوانی را قطع‌کند، فصل مشترکش با سطح استوانی ، دومولد ، یعنی دوخط راست، خواهد بود .**

تمرین

۱ـ ازیك مقطع مخروطی یك خط هادی ، یك مماس وخروج ازمرکز داده شده است ؛ مکان هندسی کانون وابسته به آن هادی را بدست آورید .

۲ـ ازیك مقطع مخروطی یك خط هادی ، یك مماس با نقطهٔ تماس و خروج از مرکز را داده‌اند ؛کانون آن را بدست آورید .

۳ـ خط هادی و دونقطه از یك مقطع مخروطی داده شده است . مکان کانون آن را بدست آورید .

مقطع مخروطی را با معلومات زیر بسازید :

۴ـ خط هادی و سه نقطه .

۵ـ خط هادی و دو نقطه و مماس بر مقطع مخروطی در یکی از آن دو نقطه .

۶- يك كانون ، خروج از مركز ، يك مماس با نقطهٔ تماس .

۷- دو خط هادی و دو نقطه .

۸- دو خط هادی ، يك نقطه و مماس بر آن نقطه .

۹- يك خط هادی ، دو نقطه و خروج از مركز .

۱۰- يك خط هادی ، مركز و يك نقطه .

۱۱- مطلوب است مكان كانونهای هذلولی‌كه يك‌مجانب ويك خطهادی آن داده شده باشند (ازتجانس استفاده‌كنيد) .

هذلولی را بامعلومات زير بسازيد :

۱۲- يك‌كانون و هادی آن و امتداد يك مجانب .

۱۳- يك مجانب ، يك‌كانون و يك نقطه .

۱۴- يك مجانب ، يك هادی و يك نقطه .

۱۵- يك مجانب ، يك هادی و يك مماس.

۱۶- سه منحنی مخروطی را از نظر قضايای پونسله با هم بسنجيد .

۱۷- سه منحنی مخروطی را از نظرقرينهٔ يك‌كانون نسبت به يك خط مماس با هم بسنجيد .

۱۸- سه منحنی مخروطی را از نظر تصوير يك‌كانون بر خط مماس‌با هم بسنجيد .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم رياضی
دبيرستانها و داوطلبان متفرقهٔ كشور در خرداد ۱۳۴۴

(وقت ۲ ساعت)

قضيهٔ ۱- در دوران زاويهٔ بين هردوپاره‌خط متناظر،مساوی است با زاويهٔ دوران .

قضيهٔ ۲- روی هرخطی‌كه دستگاه توافقی‌را قطع‌كند، نقاط‌تقاطع تشكيل يك تقسيم توافقی می‌دهند .

قضیهٔ ۳- قطبهای تمام خطهایی که بر یك نقطه می‌گذرند، برقطبی این نقطه قرار دارند.

قضیهٔ ۴- تصویر هر کانون بیضی برروی هر خط مماس برمنحنی، واقع است بر روی دایرهٔ اصلی.

قضیهٔ ۵- در هذلولی حاصلضرب فاصله‌های دو کانون از یك مماس، مساوی است با مقدار ثابت b^2.

قضیهٔ ۶- مماس بررأس سهمی، مکان هندسی تصاویر کانون سهمی است بر خطوط مماس.

مسئله - زاویهٔ xOy و نقطهٔ A در درون آن داده شده‌اند؛ دایره‌ای رسم کنید که از A بگذرد و بر دو ضلع زاویه مماس باشد. (بحث).

سؤالات هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در شهریور ۱۳۴۴

(وقت ۲ ساعت)

۱- رابطهٔ توافقی را تعبیر جبری کنید، و به‌کمك آن دو صورت مهم دیگر از رابطهٔ توافقی را بیابید.

۲- ثابت کنید در هر چهار ضلعی کامل هر قطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود.

۳- انعکاس را تعریف کرده و بیان کنید چه وقت انعکاس منفی و چه وقت مثبت است.

۴- مسئله - دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ مفروض A و B بگذرد و بر دایرهٔ مفروض (O و R) عمود باشد.

۵- طرز ترسیم مماس بر سهمی به موازات امتداد معین را شرح دهید.

۶- (قضایای پونسله در بیضی) هرگاه از نقطه‌ای دو مماس بر بیضی رسم کنیم اولاً زاویهٔ بین هر مماس با خطی که آن نقطه را به یک کانون وصل می‌کند مساوی است با زاویهٔ بین مماس دیگر و خط واصل به کانون دیگر. ثانیاً خطی که نقطهٔ مفروض یعنی نقطهٔ تقاطع دو مماس را به یک کانون وصل می‌کند نیمساز زاویهٔ بین شعاع حاملهای واصل از آن کانون به دو نقطهٔ تماس است.

۷- ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از آنها می‌توان دو مماس عمود بر هم بر هذلولی رسم کرد دایره‌ای است که مرکزش مرکز هذلولی و شعاعش $\sqrt{a^2-b^2}$ است (دایرهٔ مونژ).

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در خرداد ۱۳۴۵

(وقت $2\frac{1}{4}$ ساعت)

الف - هندسه

۱- ثابت کنید هرگاه خطی به موازات یک شعاع دستگاه توافقی رسم شود سه شعاع دیگر بر روی آن دو جزء متساوی جدا می‌کنند.

۲- ثابت کنید اوساط اقطار چهارضلعی کامل سه نقطه‌اند بر یک استقامت.

۳- دایرهٔ (O) وخط (d) مفروضند ؛ دایره‌ای به شعاع معلوم R طوری رسم‌کنیدکه بر دایرهٔ مفروض (O) عمود باشد و روی خط (d) وتری به طول معلوم (l) جدا کنند . بحث .

ب - مخروطات

۱- (قضایای پونسله درسهمی) هرگاه از نقطه‌ای دومماس برسهمی رسم شود ثابت‌کنید :

اولاً - زاویهٔ بین یك مماس و خط واصل به کانون برابر است با زاویهٔ بین مماس دیگر و خط موازی با محور .

ثانیاً - خطی که نقطهٔ تقاطع دو مماس را به‌کانون وصل می‌کند زاویهٔ بین شعاعهای حامل نقاط تماس را نصف می‌کند .

۲- اولاً - برهذلولی مفروضی مماسهایی رسم کنیدکه به موازات امتداد معین Δ باشد ؛ بحث‌کنید .

ثانیاً - وقتی‌که بتوان دو مماس متوازی بر هذلولی رسم کرد ثابت کنید خط واصل بین دو نقطهٔ تماس بر مرکز هذلولی می‌گذرد .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در شهریور ۱۳۴۵

(وقت $۲\frac{۱}{۴}$ ساعت)

الف - هندسه

قضیهٔ ۱- هر تغییرمکانی که یك شکل تغییرناپذیردر صفحهٔ خود انجام دهد ، یك انتقال است یا یك دوران .

قضیهٔ ۲- اگر A' و B' بترتیب منعکسهای نقاط A و B در انعکاس (k و O) باشند ، ثابت‌کنید :

$$A'B'=\frac{AB.|k|}{OA.OB}$$

مسئله - روی خط معلوم Δ نقطه‌ای‌تعیین‌کنیدکه چون‌ازآن‌نقطه دو مماس بر دو دایرهٔ معلوم C و C' (که با Δ روی یك صفحه قرار دارند) رسم‌کنیم ، Δ زاویهٔ بین دو مماس را نصف‌کند .

ب - مخروطات

۱- ازنقطه‌ای مانند P که درصفحهٔ بیضی مفروضی‌اختیارمی‌شود، مماس یا مماسهایی بر آن بیضی رسم‌کنید ؛ (بحث) .

۲- دایرهٔ اصلی هذلولی ، مکان هندسی تصاویر کانونهاست روی خطوط مماس بر هذلولی .

۳- اولاً - سهمی راتعریف‌کنید؛ پارامتر، تحت مماس و تحت قائم در سهمی‌کدامند ؟

ثانیاً - ثابت‌کنید تحت قائم سهمی در هر یك از نقاط آن ، برابر پارامتر سهمی است .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در خرداد ۱۳۴۶

(وقت ۲ ساعت)

۱- ثابت‌کنیدقطبهای تمام خطوط راستی‌که بریك نقطه‌می‌گذرند، برقطبی این نقطه قرار دارند .

۲- ثابت‌کنید منعکس دایره‌ای‌که برقطب انعکاس نگذشته باشد، یك دایره خواهد بود .

۳- دو دایرهٔ متخارج به مراکز O و ´O مفروضند؛ ازنقطهٔ دلخواه P واقع بر محور اصلی این دو دایره مماسهای PA و PB را بترتیب بردو دایرهٔ O و ´O رسم می‌کنیم ؛ ثابت‌کنید خطی که نقاط A و B را به یکدیگر وصل می‌کند ، بریکی از مراکز مجانست مستقیم یا معکوس این دو دایره می‌گذرد.

۴- دوخط به‌موازات امتداد معین Δ بر بیضی مماس‌کنید (با شرح) و ثابت‌کنید خطی‌که نقاط تماس را به یکدیگر وصل می‌کند ، ازمرکز بیضی می‌گذرد .

۵- ثابت‌کنید هرگاه از نقطه‌ای دو مماس برسهمی رسم شود :

الف- زاویهٔ بین یك مماس وخط واصل به‌کانون ، مساوی‌است با زاویهٔ بین مماس دیگر و خط موازی با محور .

ب - خطی‌که ازنقطهٔ تقاطع دومماس به‌کانون وصل شود ، زاویهٔ بین شعاعهای حامل نقاط تماس را نصف می‌کند .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ‌کشور در شهریور ۱۳۴۶

(وقت ۲ ساعت)

۱- رسم بیضی به وسیلهٔ نوار کاغذی را با شرح و استدلال کامل بنویسید .

۲- ثابت کنید تصویر کانون هذلولی بر روی خط مماس بر آن هذلولی ، بر دایرهٔ اصلی آن قرار دارد .

۳- رسم مماس بر سهمی از نقطهٔ P واقع در خارج آن سهمی‌را با استدلال کامل بنویسید .

۴- چهارضلعی کامل را تعریف کرده و ثابت کنید در هرچهارضلعی کامل ، هرقطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود .

۵- هرگاه مرکزهای سه دایره بریك امتداد نباشند ، ثابت کنید :

الف- سه مرکز تجانس مستقیم آنها بریك امتداد است .

ب - دو مرکز تجانس معکوس و یك مرکز تجانس مستقیم بریك امتداد است .

۶- چهار نقطهٔ A و B و C و D یك تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند (A و B مزدوج یکدیگرند) ؛ اگر نقطهٔ A را مرکز انعکاس قرارداده ومنعکسهای نقاط B و C و D را با این مرکزوقوت دلخواه k بترتیب نقاط B' و C' و D' بنامیم ، ثابت کنید B' وسط $C'D'$ قرار دارد .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در خرداد ۱۳۴۷

(وقت ۲ ساعت)

۱- ناحیهٔ داخلی وناحیهٔ خارجی بیضی‌را تعریف کرده وثابت کنید مجموع فواصل هر نقطهٔ داخل بیضی از دوکانون ،کوچکتر است از $2a$و مجموع فواصل هرنقطهٔ خارج بیضی از دو کانون، بزرگتر است از $2a$.

۲- ثابت کنید مکان هندسی نقاطی‌که از آن نقاط بتوان دومماس عمود برهم برهذلولی رسم‌کرد ، دایره‌ای است‌که مرکزش مرکز هذلولی و شعاعش $\sqrt{a^2-b^2}$ باشد (دایرهٔ مونژ) ؛ بحث در حالات مختلف .

۳- تحت مماس را در سهمی تعریف‌کرده و ثابت کنید رأس سهمی همواره در وسط تحت مماس است .

۴- ثابت‌کنید هرگاه خطی به موازات یك شعاع دستگاه توافقی رسم شود، سه شعاع دیگر برروی‌آن ، دو پاره‌خط متساوی جدا می‌کنند.

۵- ثابت‌کنید منعکس مرکز دایره‌ای‌که برقطب انعکاس نگذرد، مزدوج توافقی قطب انعکاس است نسبت به دو انتهای قطری ازمنعکس آن دایره‌که برقطب انعکاس مرورکند .

مسئله - دو دایرهٔ متخارج O و O' و نقطهٔ A خارج هر دو دایره مفروض است ؛ دایره‌ای چنان رسم‌کنیدکه از نقطهٔ A بگذرد وبا دایرهٔ O مماس شود و بر دایرهٔ O' عمود باشد (با استدلال‌کامل) .

امتحان هندسه ومخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقهٔ کشور درشهریور ۱۳۴۷

(مدت ۲ ساعت)

۱- ثابت کنید قدر مطلق نسبت عرض هر نقطه از بیضی به عرض نقطهٔ همطولش از دایرهٔ اصلی مساوی $\frac{b}{a}$ است (نسبت بـه محورهـای تقارن بیضی) .

۲- ثابت کنید هذلولی دارای دو محور تقارن عمود برهم و یك مرکز تقارن است‌که محورهای تقارن‌آن ، یکی FF' و دیگری عمود- منصف آن است و مرکز تقارن ، وسط FF' می‌باشد .

۳- ثابت کنید هر گاه از نقطه‌ای دو مماس بر سهمی رسم شود :

اولاً- زاویهٔ بین یك مماس و خط واصل از آن نقطه بـه کانون مساوی است با زاویهٔ بین مماس دیگر و خطی که از آن نقطه موازی با محور رسم شود .

ثانیاً ـ خطی که از نقطهٔ تقاطع دو مماس به کانون وصل شود ، زاویهٔ بین شعاعهای حامل نقاط تماس را نصف می‌کند .

۴ـ دوران را تعریف کرده و ثابت کنید که در دوران زاویهٔ بین هر دو پاره خط متناظر مساوی است با زاویهٔ دوران .

۵ـ ثابت کنید مماسهای بر دو منحنی منعکس دردو نقطهٔ منعکس باخط واصل بین آن دو نقطه زوایای متساوی می‌سازند .

مسئله ـ سه نقطهٔ A و B و C به‌همین ترتیب بر یك خط راست قرار دارند . اگر ´A مزدوج توافقی A نسبت به (B و C) و ´B مزدوج توافقی B نسبت به (C و A) و ´C مزدوج توافقی C نسبت به (A و B) باشند، ثابت کنید C و ´C نسبت به ´A و ´B مزدوج توافقی یکدیگر ند.

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور درخرداد ۱۳۴۸

(مدت $۲\frac{۱}{۴}$ ساعت)

هندسه

۱ـ ثابت کنید فاصلهٔ بین منعکسهای دو نقطه مساوی است با حاصل ضرب قدر مطلق قوت انعکاس در فاصلهٔ بین همان دو نقطه تقسیم بر حاصل‌ضرب فواصل آن دو نقطه ازقطب انعکاس .

۲ـ به دو سؤال از سه سؤال زیر به انتخاب خود پاسخ دهید :

الف ـ ثابت کنید انتقال شکل را تغییر نمی‌دهد ، یعنی تغییر مکان است.

ب ـ چهارضلعی کامل را تعریف کرده و ثابت کنید در چهار ضلعی کامل هرقطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود .

ج ـ ثابت کنید جانس هر دایره یك دایره است .

مسئله ـ دایره‌ا به مرکز O و خط D خارج آن و نقطهٔ A بین خط و دایره مفروض ا ت . دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A گذشته و بر خط و دایرهٔ مفرو مماس باشد(با استدلال کامل) .

مخروطات

۱ـ ثابت‌کنید گاه از نقطه‌ای دو مماس بر بیضی رسم‌کنیم :

اولاً ـ زاویهٔ ب هرمماس و خطی که آن نقطه را به یك کانون وصل می‌کند مساوی ا ت با زاویـهٔ بین مماس دیگر و خط واصل بـه کانون دیگر .

ثانیاً ـ خطی ک نقطهٔ مفروض یعنی نقطهٔ تقاطع دو مماس را به یك کانون وصل می‌ک د نیمساز زاویهٔ بین شعاعهای حامل واصل از آن کانون به دو نقطهٔ تما ن است (قضیهٔ پونسله) .

۲ـ ثابت کنید حاصل‌ضرب فاصله‌های دو کانون هذلولی‌از مماس بر آن مساوی است با مقدار ثابت b^2 .

۳ـ به یکی از دو سؤال زیر به انتخاب خود پاسخ دهید :

الف ـ ثابت ک نید خط مماس بر رأس سهمی مکان هندسی تصاویر کانون سهمی است بر خطوط مماس .

ب ـ از نقطهٔ مفروض P دو مماس بر سهمی رسم کنید ؛ راه رسم مماس وبحث آن را بنویسید .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور درشهریور ۱۳۴۸

(مدت $\frac{۱}{۴}$ ۲ ساعت)

۱ـ ثابت کنید هر تغییرمکانی‌که یك شکل تغییر ناپذیر در صفحهٔ خود انجام دهد عبارت است از یك انتقال یا یك دوران .

۲ـ ثابت‌کنید قطبی هر نقطه نسبت به یك دایره خطی‌است مستقیم عمود برقطری‌که ازآن نقطه می‌گذرد .

۳ـ مسئله ـ دایرهٔ (O, R) و پاره خط AB در خارج آن داده شده است . دایره‌ای به شعاع معلوم r و مماس بر دایرهٔ O چنان رسم‌کنیدکه چون از نقطهٔ A مماس AT را بر آن رسم کنیم ، طول مماس AT برابر پاره‌خط AB گردد (رسم یك جواب با استدلال کامل) .

۴ـ اگر دو مماس متوازی بر بیضی رسم شده باشد ، ثابت کنید نقاط تماس این دو مماس نسبت به مرکز بیضی قرینهٔ یکدیگرند .

۵ـ خطوط مجانب هذلولی مفروض را به دو طریق :

الف ـ به وسیلهٔ دایرهٔ هادی ،

ب ـ با استفاده از اقطار هذلولی ،

با استدلال کامل رسم کنید.

۶ـ فصل مشترك یك خط راست را با سهمی مفروض درحالت کلی و در حالتی که خط ازکانون سهمی می‌گذرد بدست آورید .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در خرداد ۱۳۴۹

(مدت $۲\frac{۱}{۴}$ ساعت)

مخروطات

۱- ثابت کنید حاصل‌ضرب فواصل کانونها از هرخط مماس بر بیضی برابر مقدار ثابت $b^۲$ است.

۲- ازنقطهٔ مفروض P مماسهایی بر یك هذلولی رسم کنید. به چه شرطی مماسها قابل رسمند و به کدامیك از شاخه ها رسم شده‌اند؟ (بحث کنید).

۳- به‌کمك دایرهٔ هادی چگونه بیضی‌یاهذلولی‌رسم‌می‌کنید(یکی از دو سؤال را بنویسید). در صورتی که بخواهید با نقطه‌یابی سهمی رسم‌کنید، چه می‌کنید؟ (یك طریقه را شرح دهید). از این راه رسم، تعریف مشترکی برای مقاطع مخروطی (بیضی، هذلولی و سهمی) نتیجه می‌شود؛ این تعریف مشترك را در یك عبارت بنویسید.

۴- ثابت کنید تحت قائم سهمی در هر یك از نقاط آن، برابر پارامتر سهمی است.

هندسه

۵- تبدیل و تغییرمکان را فقط تعریف کنید و ثابت کنید برای شناختن وضع جدید شکلی در تغییرمکانی کافی است اوضاع جدید دو نقطهٔ شکل معلوم باشد.

۶- ثابت‌کنید محورهای اصلی سه دایره که مراکز آنها بر یك استقامت نباشند، متقاربند. نقطهٔ مشترك محورهای اصلی راچه می‌نامند؟ در صورتی‌که مراکز سه دایره بر یك استقامت باشند، محورهای اصلی چه اوضاعی خواهند داشت؟

از دو سؤال زیر یکی را باختیار انتخاب نموده جواب دهید :

۷- ثابت کنید قطبیهای تمام نقاطی که روی یك خط باشند ، بر قطب این خط می‌گذرند ، یعنی متقارب‌ند . و آیا می‌دانید خطی که قطبهای دو خط را به هم وصل می‌کند ، چگونه خطی است ؟

۸- ثابت کنید منعکس دایره وقتی که بر قطب انعکاس نگذرد دایره است. اندازهٔ شعاع این دایره و نیزفاصلهٔ آن راتا قطب انعکاس نام ببرید .

مسئله - مثلث غیرمشخص ABC در دایرهٔ O محاط است . AA′ ارتفاع نظیر رأس A را رسم می‌کنیم (A′ روی ضلع BC است). خطی مماس بر دایرهٔ مذکور چنان رسم کنید تا امتداد اضلاع AB و AC را بترتیب در E و F قطع کند و AA′ نیمساز یکی از زوایای بین دو خط A′E و A′F باشد .

امتحان هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور در شهریور ۱۳۴۹

(مدت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت)

هندسه

۱- ثابت کنید مجانس هر چندضلعی چندضلعی دیگری است متشابه با آن. دو چندضلعی متشابه در چه صورت متجانس می‌باشند؟ آیا می‌توانید برای تشابه دو چندضلعی تعریف جدیدی بنویسید؟ فرق بین تشابه و تجانس در چیست؟

۲- قطبی یك نقطه نسبت به یك دایره چیست ، تعریف کنید. سپس یك مثلث غیرمشخص را به‌وسیلهٔ قطب و قطبی نسبت به یکی از دایره‌های محاطی خارجی آن به شکل دیگری تبدیل کنید .

۳- دایرهٔ انعکاس چیست ؟ ثابت کنید دو دایرهٔ متمایز به هروضع دریك صفحه قرار گیرند ، منعکس یکدیگرند . قوت انعکاس را در این حالت برحسب قوت مرکز انعکاس نسبت به دو دایره حساب کنید .

مخروطات

۴ـ اگر از نقطه‌ای مانند **P** دو مماس بر یکی از مقاطع مخروطی، فقط یکی (بیضی، هذلولی یا سهمی) رسم شود، ثابت کنید خطوطی که **P** را به کانونها وصل‌می‌کنندبا خطوط مماس زوایای متساوی می‌سازند.

۵ـ ناحیهٔ داخل و ناحیهٔ خارج در هذلولی‌کدامند؟ ثابت کنید تفاضل فواصل هر نقطهٔ واقع در داخل هذلولی از دوکانون‌آن، بزرگتر است از ۲**a** (عدد ثابت هذلولی).

۶ـ خطی مماس برسهمی رسم‌کنیدکه به موازات امتداد مفروضی باشد. نقطهٔ تماس را تعیین‌کنید. به‌چه شرطی رسم مماس ممکن است؟

۷ـ ثابت‌کنید خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی‌است‌که ازآن نقاط مماسهای عمود برهم برسهمی می‌توان رسم کرد.

۸ـ دایرهٔ اصلی یك مقطع مخروطی و یکی از کانونهای آن را در نظر می‌گیریم؛ قطبی این‌کانون را نسبت به دایرهٔ اصلی چه می‌نامند؟ چه تعریف مشترکی به کمك یك نقطه مثل **F** و یك خط مثل Δ برای مقاطع مخروطی می‌شناسید؟ آن را بنویسید و از هم متمایز سازید.

مسئله ـ سه نقطهٔ ثابت **A** و **B** و **M** غیر واقع بر یك استقامت مفروضند. از **M** خط متغیری مانند Δ می‌گذرانیم؛ می‌دانید که در حالت کلی بر دو نقطهٔ **A** و **B** می‌توان دو دایره گذراند که بر خط Δ مماس باشند:

اولاً ـ این دودایره رارسم‌کنید (راه‌رسم رابانکردلیل‌شرح‌دهید).

ثانیاً ـ به فرض آنکه **C** و **D** نقاط تماس دوایر مذکور با خط متغیرΔ باشند، مطلوب‌است مکان هندسی‌نقطهٔ **N** مزدوج توافقی**M** نسبت به دو نقطهٔ **C** و **D**.

شکلهای لازم را بدقت رسم کنید.

پایان